

**ÜBER EIN PENALTY-VERFAHREN ZUR LÖSUNG  
NICHTLINEARER ELLIPTISCHER VARIATIONSUNGLEICHUNGEN  
MIT HILFE DER FINITE ELEMENTE METHODE**

DISSERTATION  
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaft

am Fachbereich Mathematik  
der Johannes Gutenberg Universität in Mainz

WILHELM WERNER  
geb. in Simmern/Hunsrück

1978

Mainz 1977



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41552618\\_0059](https://archive.org/details/IA41552618_0059)

**ÜBER EIN PENALTY-VERFAHREN ZUR LÖSUNG  
NICHTLINEARER ELLIPTISCHER VARIATIONSUNGLEICHUNGEN  
MIT HILFE DER FINITE ELEMENTE METHODE**

DISSERTATION  
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaft

am Fachbereich Mathematik  
der Johannes Gutenberg Universität in Mainz

WILHELM WERNER  
geb. in Simmern/Hunsrück

Mainz 1977

Berichterstatter:

Prof. Dr. H.N. Mülthei, Mainz

Prof. Dr. W. Börsch-Supan, Mainz

Prof. Dr. F. Natterer, Saarbrücken

Datum der mündlichen Prüfung: 25.1.1978

# INHALT

|                                                                                                                            |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| EINLEITUNG                                                                                                                 | -1-  |
| KAPITEL I                                                                                                                  |      |
| 1.1 SOBOLEV-Räume                                                                                                          | -7-  |
| 1.2 Geordnete Banach-Räume                                                                                                 | -9-  |
| 1.3 Monotone Operatoren                                                                                                    | -11- |
| 1.4 Gleichungen mit monotonen Operatoren;<br>das Galerkin-Verfahren                                                        | -19- |
| 1.5 Variationsungleichungen                                                                                                | -20- |
| KAPITEL II                                                                                                                 |      |
| 2.1 Einleitung                                                                                                             | -29- |
| 2.2 Eine Klasse von Penalty-Verfahren zur Lösung<br>nichtlinearer Variationsungleichungen mit<br>Hindernisnebenbedingungen | -32- |
| KAPITEL III                                                                                                                |      |
| 3.1 Ein Störungssatz                                                                                                       | -42- |
| 3.2 Finite Elemente Approximation der Penalty-<br>Gleichung 2.1.5                                                          | -46- |
| KAPITEL IV                                                                                                                 |      |
| 4.1 Numerische Realisierung des Verfahrens für<br>$\Omega = (0,1) \times (0,1)$                                            | -55- |
| 4.2 Numerische Ergebnisse                                                                                                  | -59- |
| LITERATURVERZEICHNIS                                                                                                       | -64- |



## EINLEITUNG

Zunächst soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden, bei welcher Art von Problemen Variationsungleichungen mit Hindernis- nebenbedingungen auftreten:

sei  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R})$  eine konvexe Funktion; gesucht seien jene  $\xi \in \mathbb{R}_+^n$ , für die

$$0.1 \quad f(\xi) = \min_{x \geq 0} f(x)$$

gilt. Dabei soll " $\geq$ " als komponentenweise Ordnung in  $\mathbb{R}^n$  verstanden werden. Die Existenz einer Lösung  $\xi \in \mathbb{R}_+^n$  von 0.1 wird z.B. durch die Bedingung

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \|x\| \rightarrow \infty$$

sichergestellt.

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden:

(a)  $\xi$  liegt im Innern von  $\mathbb{R}_+^n$ ; dann ist

$$\text{grad } f(\xi) = 0;$$

(b)  $\xi$  liegt auf dem Rand  $\partial \mathbb{R}_+^n$  von  $\mathbb{R}_+^n$ ; dann ist

$$\text{grad } f(\xi) \cdot (\xi - x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Faßt man beide Fälle zusammen, so erhält man als notwendige Bedingung für die Lösungen  $\xi$  von 0.1:

$$0.2 \quad \text{grad } f(\xi) \cdot (\xi - x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \geq 0$$

("·" bezeichne das übliche Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$ ).

Ungleichungen diesen Typs heißen Variationsungleichungen; sie sind meist - wie in obigem Beispiel - notwendige Bedingung für die Lösung einer restringierten Optimierungsaufgabe, falls deren Zielfunktion geeignete Differenzierbarkeitsbedingungen besitzt.

Bekanntlich lassen sich auch elliptische Randwertaufgaben als notwendige Bedingung für die Lösung einer geeigneten Minimalaufgabe ohne Nebenbedingungen interpretieren (Beispiel: Minimalflächen-gleichung). Betrachtet man eine solche Minimalaufgabe und stellt zusätzlich noch Nebenbedingungen, denen die Lösung genügen muß, so

ist die notwendige Bedingung keine Gleichung mehr, sondern wie in obigem Beispiel eine Ungleichung (Beispiel: Minimalflächenproblem mit Hindernissen); man spricht in diesem Fall von elliptischen Variationsungleichungen.

Die Behandlung solcher elliptischer Variationsungleichungen hängt naturgemäß ganz wesentlich von der Art der gestellten Nebenbedingungen ab; in der vorliegenden Arbeit soll für eine spezielle Klasse von Nebenbedingungen eine Methode untersucht werden, die diese Probleme mit Hilfe der Finite Elemente Methode löst. Es handelt sich dabei um ein Penalty-Verfahren ähnlicher Art, wie es von verschiedenen Autoren für Regularitätsuntersuchungen bei linearen elliptischen Variationsungleichungen verwendet wurde (LEWY-STAMPACCHIA [1], STAMPACCHIA [1], [2], [4]).

Das wesentlichste Hilfsmittel der Überlegungen ist die Theorie der monotonen Operatoren von BROWDER, MINTY et al. (vgl. VAINBERG [1], GAJEWSKI-GRÖGER-ZACHARIAS [1]).

Die in dieser Arbeit betrachteten (Hindernis-) Nebenbedingungen haben die Form

$$u \geq \psi ,$$

wodurch schon angedeutet wird, daß das Problem in einem geordneten Banachraum untersucht wird, der darüberhinaus noch die Verbandseigenschaften besitzen soll. In solchen Banachverbänden gibt es einen stärkeren Monotoniebegriff für Operatoren ("T-Monotonie"), der von BREZIS-STAMPACCHIA [1] eingeführt wurde, jedoch implizit schon in früheren Arbeiten des zweiten Autors Verwendung findet. In dieser Arbeit werden ausschließlich T-monotone Operatoren betrachtet; die Klasse dieser Operatoren beinhaltet sehr viele wichtige Beispiele.

Im folgenden soll ein kurzer Überblick über diese Arbeit und über Ergebnisse anderer Autoren gegeben werden; die angedeuteten Sachverhalte werden später noch präzisiert.

Sei  $A$  ein linearer elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung auf dem Sobolev-Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein offenes beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand; sei  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ ,

$$K_\psi := \{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid u \geq \psi \text{ fast überall} \} .$$

Sind die Koeffizienten von A symmetrisch, so ist u genau dann eine Lösung der Minimalaufgabe

$$0.3 \quad \min_{u \in K_\psi} (\langle Au, u \rangle - 2\langle f, u \rangle) !$$

wenn u Lösung der folgenden Variationsungleichung ist:

$$0.4 \quad \langle f - Au, v - u \rangle \leq 0 \text{ für alle } v \in K_\psi$$

("<.,.>" bezeichne die Dualität zwischen dem Sobolev-Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  und seinem Dualraum  $W^{-1,2}(\Omega)$ ,  $f \in W^{-1,2}(\Omega)$ ).

Sei nun  $V \subseteq W_0^{1,2}(\Omega)$  ein endlichdimensionaler Unterraum stetiger Funktionen,  $K_{\bar{\psi}} \subseteq V$  eine konvexe Menge, die  $K_\psi$  in geeigneter Weise "approximiert", etwa

$$K_{\bar{\psi}} = \{v \in V \mid v \geq \bar{\psi}\}$$

( $\bar{\psi}$  z.B. eine Interpolierende von  $\psi$ ). Die endlichdimensionale Minimalaufgabe

$$0.5 \quad \min_{v \in K_{\bar{\psi}}} (\langle Av, v \rangle - 2\langle f, v \rangle) !$$

liefert eine Näherung für die Lösung u des Problems 0.3. Man ist nun natürlich an Aussagen über die Güte der Näherung interessiert; für spezielle Gebiete in  $\mathbb{R}^2$  wurde dieses Problem im Hinblick auf die erreichbare Konvergenzordnung bei Verwendung stückweise linearer finite Elemente von FALK [1], [2] und MOSCO-STRANG [1] untersucht. Die Autoren weisen in diesem Fall die Konvergenzordnung  $O(h)$  in der Energienorm nach; dabei ist h die für den verwendeten finite Elemente Raum charakteristische Größe, die im wesentlichen ein Maß für die Feinheit der Zerlegung von  $\Omega$  darstellt. Bekannte Regularitätsaussagen (vgl. BREZIS-STAMPACCHIA [1]) zeigen, daß diese Ordnung i.a. nicht verbessert werden kann: in diesem Sinn ist die Ordnung  $O(h)$  optimal.

In dieser Arbeit wird ein etwas anderer Weg eingeschlagen: Ausgangspunkt ist nicht das Minimalproblem 0.3, sondern die Variationsungleichung 0.4. Es wird zu 0.4 eine Folge von Näherungsgleichungen ("Penalty-Probleme") konstruiert, welche dann mit einem Galerkin-Ansatz näherungsweise gelöst werden. Man kann diese Vorgehensweise wie folgt interpretieren:

die Variationsungleichung 0.4 ist äquivalent zu

$$0.6 \quad f - Au \in \partial_{X_K}(u) ,$$

dabei ist  $\partial_{X_K}$  der Subgradient der Indikatorfunktion von  $K$ .  $\partial_{X_K}$  ist ein multi-wertiger monotoner Operator:

$$\partial_{X_K} : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow 2^{W^{-1,2}(\Omega)} .$$

Approximiert man  $\partial_{X_K}$  in geeigneter Weise durch eine Folge gewöhnlicher monotoner Operatoren, so erhält man eine Folge von Näherungsungleichungen mit monotonen Operatoren in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Unter bestimmten Voraussetzungen konvergiert die Folge der Lösungen dieser Gleichungen gegen die Lösung der Variationsungleichung 0.4.

Zur numerischen Lösung der Näherungsgleichungen (das sind hier nichtlineare elliptische Randwertaufgaben) werden dann finite Elemente Methoden angewandt. Es wird untersucht, wie man die Näherungsgleichungen konstruieren muß, um dabei eine möglichst hohe Konvergenzordnung (in der Energie-Norm) zu erzielen. Für geeignete Approximationen von  $\partial_{X_K}$  stellt sich heraus, daß man eine Konvergenzordnung erreichen kann, die mit der in den schon bekannten Fällen berechneten übereinstimmt.

Die in dieser Arbeit angestellten Überlegungen sind auf eine große Klasse von Problemen anwendbar, die in verschiedener Hinsicht allgemeiner sind als die bisher untersuchten:

- (a) es sind nichtlineare elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung zugelassen,
- (b) die Methode und die Ergebnisse sind nicht abhängig von der Dimension des zugrundeliegenden Gebietes,
- (c) es sind auch Variationsungleichungen mitinbegriffen, die nicht von einer Minimalaufgabe herrühren,
- (d) die Ergebnisse hängen nur von den Approximationseigenschaften des verwendeten finite Elemente Raumes, nicht jedoch von der speziellen Gestalt der finiten Elemente (etwa: "stückweise linear") ab .

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wird noch gezeigt, wie man das untersuchte Penalty-Verfahren im Falle stückweise linearer finite Elemente praktisch realisieren kann.

Das Verfahren wurde auf zwei Beispiel-Typen angewandt:

- (a) Minimalflächenprobleme mit Hindernissen
- (b) halblinare Variationsungleichungen mit Hindernisnebenbedingungen, wie sie bei Strahlungsproblemen der Reaktorphysik oder Problemen der molekularen Diffusion auftreten :

Zu erwähnen ist noch, daß sich bestimmte Variationsungleichungen mit Gradientenbeschränkungen so umformulieren lassen, daß sie in die hier betrachtete Problemklasse fallen; als Beispiel sei die elasto-plastische Torsion eines zylindrischen Balkens genannt (vgl. BREZIS-SIBONY [1], GLOWINSKI - LIONS-TREMOLIERES [1]) .

Das wesentliche Ergebnis dieser Arbeit besteht nicht so sehr darin, daß ein konstruktives Verfahren angegeben wird, mit dem eine große Klasse von nichtlinearen Variationsungleichungen mit einer angebbaren Genauigkeit gelöst werden kann . Die eigentliche Schlußfolgerung lautet: die in Frage kommenden Variationsungleichungen lassen sich mit der hier angegebenen Konvergenzordnung lösen; das ist ein Kriterium, anhand dessen man auch die Güte anderer Verfahren (etwa Verfahren der konvexen Optimierung) beurteilen kann.

Wendet man die Ergebnisse, das ist die berechnete Konvergenzordnung der finite Elemente Approximation, dieser Arbeit auf schon in der Literatur behandelte Fälle an, so werden die entsprechenden Resultate dieser Arbeiten (FALK, MOSCO-STRANG, GLOWINSKI-MARROCO) bestätigt. Dies deutet darauf hin, daß das hier erreichte Resultat nicht verbessert werden kann; dies ist jedoch bislang unbewiesen.

Nicht untersucht wurden Fehlerabschätzungen in der  $L^2$  oder  $L^\infty$ -Norm, die im Vergleich zu Abschätzungen in der Energie-Norm weitaus schwieriger zu erhalten sind und darüberhinaus auch gänzlich andere Beweismethoden erfordern. Für lineare elliptische Variationsungleichungen findet man solche Abschätzungen bei NATTERER [1] ( $L^2$ -Fehlerabschätzungen) und NITSCHKE [1] ( $L^\infty$ -Fehlerabschätzungen).

Zur Notation sei folgendes bemerkt:

- (a) Konstanten (die von den Daten der Variationsungleichung abhängen können) werden durchweg mit dem Buchstaben  $c$  bezeichnet, auch wenn

sie sich im Laufe der Abschätzungen ändern;

(b) eine logische Einheit (z.B. der Beweis eines Satzes) wird durch das Symbol  $\square$  abgeschlossen, falls dies nicht ohnehin auf Grund der Numerierung ersichtlich ist.

Ich danke Herrn Prof.Dr..H. Mülthei und Herrn Dr. A. Louis, die mir manch wertvolle Anregung gaben und durch zahlreiche Diskussionen beitrugen, daß die vorliegende Arbeit in dieser Form entstehen konnte.

# KAPITEL I

## PRÄLIMINARIEN

Im folgenden sollen einige bekannte Sätze, Definitionen und Bezeichnungen aufgeführt werden, um den Leser mit den hier verwendeten Notationen vertraut zu machen.

### 1.1 SOBOLEV - RÄUME

Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ein offenes, beschränktes Gebiet;  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) seien die bekannten Lebesgue-Räume mit der Norm

$$\|u\|_p := \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} & , \text{ falls } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| & , \text{ falls } p = \infty \end{cases}$$

$C_0^\infty(\Omega)$  sei die Menge der beliebig oft differenzierbaren (reellwertigen) Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$ ;  $C_0^\infty(\Omega)$  ist für  $1 \leq p < \infty$  eine dichte Teilmenge von  $L^p(\Omega)$ . Durch die übliche Schwartz'sche Topologie wird  $C_0^\infty(\Omega)$  ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, den man mit  $\mathcal{D}(\Omega)$  bezeichnet (vgl. z.B. YOSHIDA [1]). Die Elemente des Dualraums  $\mathcal{D}'(\Omega)$  heißen Distributionen auf  $\Omega$ ; es sei für  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \phi \rangle := u(\phi) \quad .$$

Sei  $D^\alpha$  der Differentialoperator

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  ein Multiindex mit  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ;

die Ableitung einer Distribution  $u$  auf  $\Omega$  wird erklärt durch:

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$W^{k,p}(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ;  $k \geq 0$ ) bezeichne die Menge aller Distributionen  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , für die  $u$  und sämtliche Ableitungen  $D^\alpha u$  der Ordnungen  $|\alpha| \leq k$  Funktionen in  $L^p(\Omega)$  sind.

Die Mengen  $W^{k,p}(\Omega)$  heißen SOBOLEV-Räume.  $W^{k,p}(\Omega)$  wird mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} := \begin{cases} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|, & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

ein (für  $1 < p < \infty$  reflexiver) Banachraum. Die Abschließung von  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $W^{k,p}(\Omega)$  wird mit  $W_0^{k,p}(\Omega)$  bezeichnet. Die Norm

$$\|u\|_{k,p} := \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}$$

(falls  $1 < p < \infty$ ; übliche Modifikation für  $p = \infty$ ) ist auf  $W_0^{k,p}(\Omega)$  mit  $\|\cdot\|_{k,p}$  äquivalent. Der Dualraum  $(W_0^{k,p}(\Omega))'$  werde für  $1 < p < \infty$  mit  $W^{-k,p'}(\Omega)$  bezeichnet; dabei ist  $p'$  der zu  $p$  konjugierte Index:  $1/p + 1/p' = 1$ .

Die Bedeutung der Sobolev-Räume liegt vor allem darin, daß die Elemente dieser Räume bei geeigneten Konstellationen der Indizes  $p, k$  und der Raumdimension  $n$  gewisse Regularitätseigenschaften besitzen und sich in mannigfacher Weise in andere Funktionenräume einbetten lassen. An dieser Stelle sei nur das wichtigste dieser Ergebnisse - der sogenannte SOBOLEV'sche Einbettungssatz - zitiert; eine ausführliche Darstellung und Verallgemeinerungen findet man z.B. bei ADAMS [1].

#### 1.1.1 SATZ (SOBOLEV'scher Einbettungssatz)

Vor.:  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  sei beschränkt und erfülle die Kegelbedingung; es sei  $1 \leq p < \infty$ .

Beh.: (a) Für  $0 \leq j < k$  und jedes  $r$  mit  $\frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} \leq \frac{1}{r} < 1$  ist die Einbettung  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,r}(\Omega)$  stetig.  
 (b) Falls  $\frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} < 0$ , so ist die Einbettung  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$  stetig.

### 1.1.2 BEMERKUNG

(a) Ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  erfüllt z.B. dann die Kegelbedingung, wenn  $\Omega$  konvex ist oder einen Rand  $\partial\Omega$  der Klasse  $C^1$  besitzt (vgl. z. B. FRIEDMAN [1]).

(b) Schreibt man in 1.1.1  $W_0^{k,p}(\Omega)$  statt  $W^{k,p}(\Omega)$ , so kann man auf die Kegelbedingung verzichten.

## 1.2 GEORDNETE BANACH-RÄUME

Sei  $X$  ein reeller Banachraum,  $\geq$  eine Halbordnung in  $X$ , welche durch einen abgeschlossenen positiven Kegel

$$P := \{ v \in X \mid v \geq 0 \}$$

induziert wird.  $X$  sei darüberhinaus ein Verband bzgl. dieser Ordnung, d.h. je zwei Elemente  $u, v \in X$  haben in  $X$  eine gemeinsame kleinste obere Schranke  $u \vee v$  und eine gemeinsame größte untere Schranke  $u \wedge v$ ; es sei

$$u^+ := u \vee 0$$

und  $u^- := -(u \wedge 0)$ .

Jeder Vektor  $u \in X$  läßt sich in der Form

$$u := u^+ - u^-$$

zerlegen, d.h.  $X = P - P$ . Ist  $V$  ein linearer Unterraum von  $X$ , so heißt  $V$  Unterverband von  $X$ , falls mit  $u, v \in V$  auch  $u \wedge v$  und  $u \vee v$  in  $V$  liegen.

Der Kegel  $P \subseteq X$  induziert einen dualen Kegel  $P'$  in  $X'$ :

$$P' := \{ v' \in X' \mid \langle v', v \rangle_{X', X} \geq 0 \text{ für alle } v \in P \}$$

( $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  bedeute hierbei die Dualität zwischen  $X$  und  $X'$ ; im folgenden wird oft nur  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  geschrieben, wenn klar ist, welche Dualität gemeint ist). Der Vektorraum

$$X^* := P' - P'$$

heißt Ordnungsdualraum von  $X$ ; i.a. ist  $X^*$  ein echter Teilraum von  $X'$ .

### 1.2.1 BEISPIELE

(a) Der Lebesgue-Raum  $L^p(\Omega)$  ( $1 < p < \infty$ ) mit der Ordnungsrelation

$$u \geq v \iff u(x) \geq v(x) \text{ fast überall in } \Omega$$

ist ein Verband; der positive Kegel in  $L^p(\Omega)$  ist abgeschlossen. Der Ordnungsdualraum  $(L^p(\Omega))^*$  stimmt mit dem topologischen Dualraum  $L^{p'}(\Omega)$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ) überein (vgl. BOHL [1]).

(b) Der Sobolev-Raum  $W^{1,p}(\Omega)$  ( $1 < p < \infty$ ) mit der von  $L^p(\Omega)$  induzierten Halbordnung (vgl. (a)) ist ein Verband; der positive Kegel in  $W^{1,p}(\Omega)$  ist abgeschlossen.

$W_0^{1,p}(\Omega)$  ist ein Unterverband von  $W^{1,p}(\Omega)$ . Der Ordnungsdualraum  $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$  von  $W_0^{1,p}(\Omega)$  ist die Menge aller Distributionen in  $W^{-1,p'}(\Omega)$ , die sich als Differenz zweier positiver Radon-Maße darstellen lassen.

$(W_0^{1,p}(\Omega))^*$  ist ein abgeschlossener echter Unterraum von  $W^{-1,p'}(\Omega)$  (vgl. MOSCO [1]).

### 1.2.2 BEMERKUNG

(a) Eine ausführliche Darstellung der Theorie geordneter Banachräume findet man in SCHAEFER [1], [2] und BOHL [1].

Ordnungseigenschaften verschiedener Funktionenräume (z.B.  $C^k(\Omega)$ ,  $L^p(\Omega)$ ,  $W^{k,p}(\Omega)$ ) werden in AMANN [1] untersucht.

(b) Für  $k > 1$  ist  $W^{k,p}(\Omega)$  kein Verband mehr; dies ist der Grund dafür, daß sich diese Arbeit auf Variationsungleichungen mit elliptischen Differentialoperatoren zweiter Ordnung beschränkt.

### 1.3 MONOTONE OPERATOREN

Im folgenden seien  $X, Y$  stets separable, reflexive, reelle Banachräume;  $X', Y'$  seien die entsprechenden Dualräume.  $X$  sei stetig und dicht in  $Y$  eingebettet. Wegen

$$\langle v, w \rangle_{Y', Y} = \langle v, w \rangle_{X', X} \quad \text{für } v \in Y', w \in X$$

wird oft nicht zwischen den Dualitäten unterschieden und kurz  $\langle v, w \rangle$  geschrieben.

#### 1.3.1 DEFINITION

Ein Operator  $A: X \rightarrow X'$  heißt

(a) demistetig, falls aus  $u_n \rightarrow u$  (in  $X$ ) folgt:  $Au_n \rightarrow Au$  (in  $X'$ );  
 ("  $\rightarrow$  " bedeute: "konvergiert in der Norm gegen", "  $\rightharpoonup$  " bedeute: "konvergiert schwach gegen" )

(b) beschränkt, falls er beschränkte Mengen in beschränkte Mengen überführt;

(c) beschränkt Lipschitz-stetig, wenn es eine monoton wachsende reellwertige Funktion  $L$  gibt, so daß

$$\|Au - Av\|_{X'} \leq L(R) \|u - v\|_X$$

für alle  $u, v \in X$  mit  $\|u\|_X \leq R, \|v\|_X \leq R$  gilt.

#### 1.3.2 BEMERKUNG

In der Literatur wird häufig der Begriff der Hemistetigkeit verwendet; für monotone Operatoren  $A: X \rightarrow X'$  sind die Begriffe demistetig und hemistetig äquivalent (vgl. VAINBERG [1] ).

#### 1.3.3 DEFINITION

(i) Ein Operator  $A: X \rightarrow X'$  heißt

(a) monoton, falls für alle  $u, v \in X$  gilt:  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$  ;

(b) strikt monoton, falls für alle  $u, v \in X$  gilt:  
 aus  $u \neq v$  folgt :  $\langle Au - Av, u - v \rangle > 0$  ;

(c) d-monoton, wenn es eine auf  $[0, \infty)$  definierte, streng monoton wachsende Funktion  $\rho$  gibt, so daß für alle  $u, v \in X$  gilt:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq [\rho(\|u\|_X) - \rho(\|v\|_X)] (\|u\|_X - \|v\|_X) \quad :$$

(d) gleichmäßig  $\rho$ -monoton, wenn es eine auf  $[0, \infty)$  definierte, stetige, streng monoton wachsende Funktion  $\rho$  gibt mit  $\rho(0) = 0$ ,  $\rho(x)/x \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , so daß

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \rho(\|u - v\|_X)$$

für alle  $u, v \in X$ .

(ii) Ist  $Y$  ein Verband,  $X \subseteq Y$  ein Unterverband, so heißt ein Operator  $A: Y \rightarrow X'$

(a) T-monoton, wenn für alle  $u, v \in Y$  mit  $(u-v)^+ \in X$  gilt

$$\langle Au - Av, (u-v)^+ \rangle \geq 0;$$

(b) strikt T-monoton, wenn für alle  $u, v \in Y$  mit  $(u-v)^+ \in X \setminus \{0\}$  gilt:

$$\langle Au - Av, (u-v)^+ \rangle > 0;$$

(c) gleichmäßig  $\rho$ -T-monoton, falls für alle  $u, v \in Y$  mit  $(u-v)^+ \in X$  gilt:

$$\langle Au - Av, (u-v)^+ \rangle \geq \rho(\|(u-v)^+\|_X)$$

( $\rho$  sei dabei wie in (i) (d)).

#### 1.3.4 BEMERKUNG

(a) Der Begriff T-monoton wurde von BREZIS-STAMPACCHIA [1] eingeführt, jedoch implizit schon in früheren Arbeiten von STAMPACCHIA benutzt.

(b) In den Anwendungen, die Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind, wird die in 1.3.3 auftretende Funktion  $\rho$  stets die Form

$$\rho(x) = c x^p \quad (1 \leq p < \infty; c > 0)$$

haben. In diesen Fällen soll der Operator  $A$  kurz "gleichmäßig monoton" bzw. "gleichmäßig T-monoton" genannt werden; es wird dann aus dem Zusammenhang ersichtlich sein, welches  $p$  gemeint ist.

(c) Beispiele monotoner und strikt monotoner Operatoren sind bestimmte elliptische Differentialoperatoren in Divergenzform auf Sobolevräumen (vgl. LIONS [1], GAJEWSKI-GRÜGER-ZACHARIAS [1]).

Die Dualitätsabbildungen reflexiver Banachräume mit strikt konvexem Dualraum sind Beispiele für d-monotone Operatoren (vgl. LIONS [1], BROWDER [1]).

### 1.3.5 LEMMA

Vor.: Der Operator  $A: Y \rightarrow X'$  sei (strikt) T-monoton.

Beh.: Die Restriktion

$$A: X \rightarrow X'$$

ist ein (strikt) monotoner Operator.

Beweis: vgl. BREZIS-STAMPACCHIA [1] oder MOSCO [1] .

### 1.3.6 LEMMA

Vor.: Der Operator  $A: Y \rightarrow X'$  sei gleichmäßig  $\rho$ -T-monoton; für  $u \in X$

gelte:  $\rho(\|u^+\|_X) + \rho(\|u^-\|_X) \geq \rho(\|u\|_X)$  .

Beh.: Die Restriktion

$$A: X \rightarrow X'$$

ist ein gleichmäßig  $\rho$ -monotoner Operator.

Beweis: Sei  $u, v \in X$ . Dann ist

$$\begin{aligned} u-v &= (u-v)^+ - (u-v)^- \\ &= (u-v)^+ - (v-u)^+ . \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \langle Au-Av, u-v \rangle &= \langle Au-Av, (u-v)^+ \rangle + \langle Av-Au, (v-u)^+ \rangle \\ &\geq \rho(\|(u-v)^+\|_X) + \rho(\|(v-u)^+\|_X) \\ &= \rho(\|(u-v)^+\|_X) + \rho(\|(u-v)^-\|_X) \\ &\geq \rho(\|u-v\|_X) . \end{aligned}$$

### 1.3.7 BEMERKUNG

(a) Ist  $X = W_0^{k,p}(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ;  $k \in \mathbb{N}$ ), so ist die Bedingung

$$\rho(\|u^+\|_X) + \rho(\|u^-\|_X) \geq \rho(\|u\|_X) \quad \text{für alle } u \in X$$

für alle Funktionen  $\rho$  mit  $\rho(x) := c \cdot x^p$  ( $c > 0$ ) erfüllt, wenn man  $W_0^{k,p}(\Omega)$  z.B. mit der Norm  $\|\cdot\|_{k,p,0}$  (vgl. 1.1) versieht.

(b) Ist  $Y = W^{1,p}(\Omega)$ ,  $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ , so gilt:

aus  $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$  folgt:  $(u-v)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , falls  $u(x) \leq v(x)$  auf  $\partial\Omega$

(vgl. LADYSHENSKAYA-URAL'TSEVA [1] ). Dabei sei der Rand  $\partial\Omega$  hinreichend glatt (z.B. aus der Klasse  $C^2$ ), daß man einer Funktion

$u \in W^{1,p}(\Omega)$  Randwerte zuordnen kann (vgl. NECAS [1]).

Insbesondere gilt: für  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{R}_+$ , ist  $(u-v-k)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ; von dieser Tatsache wird später häufig Gebrauch gemacht werden. ■

Das folgende Beispiel monotoner Operatoren ist Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen; alle später auftretenden monotonen Operatoren werden von diesem Typ sein.

### 1.3.8 VORAUSSETZUNGEN

(a) Im folgenden sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  stets ein offenes, beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega$  aus der Klasse  $C^2$  (vgl. NECAS [1], GAJEWSKI-GRÖGER-ZACHARIAS [1]).

(b) Es sei  $(a_1, \dots, a_n) \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld, das der Bedingung

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \eta)] (\xi_i - \eta_i) \geq 0$$

für alle  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$  und alle  $x \in \Omega$  genügt. Ferner mögen die Funktionen  $a_i$  folgenden Wachstumsbedingungen genügen:

$$|a_i(x, \xi)| \leq \alpha(x) + c \cdot \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p-1} \quad (i=1, \dots, n)$$

mit  $\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ ,  $c > 0$ .

(c) Es sei  $b \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ; für  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \Omega$  gelte

$$(b(x, \xi) - b(x, \eta))(\xi - \eta) \geq 0.$$

Ist  $p \leq n$ , so gelte noch folgende Wachstumsbedingung:

$$|b(x, \xi)| \leq \beta(x) + c|\xi|^{s-1}, \quad \xi \in \mathbb{R}, x \in \Omega, \quad \beta \in L^{s'}(\Omega)$$

$$s \in \begin{cases} [1, np/(n-p)) & , \text{ falls } n > p \\ [1, \infty) & , \text{ falls } n = p \end{cases}, \quad 1/s + 1/s' = 1.$$

Das Vektorfeld  $(a_1, \dots, a_n)$  sowie die Funktion  $b$  führen zur Definition eines Funktionala  $a$  auf  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ :

$$1.3.9 \quad a(u, v) := \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} b(x, u) v dx$$

### 1.3.10 BEMERKUNG

(a) Die Existenz der in 1.3.9 auftretenden Integrale folgt aus den an  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) und  $b$  gestellten Wachstumsbedingungen und (im Falle des zweiten Integrals) dem Sobolev'schen Einbettungssatz 1.1.1 (vgl. z.B. VAINBERG [1]).

(b) Die Schreibweise " $a_i(x, \nabla u)$ " bzw. " $b(x, u)$ " in 1.3.9 ist bezüglich des Arguments  $x$  inkonsequent, hat sich aber in dieser Form eingebürgert und wird daher wohl nicht zu Mißverständnissen führen.

(c)  $a$  ist auf  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$  eine Quasibilinearform, d.h.  $a$  ist linear im zweiten Argument, und eine Bilinearform, falls die Funktionen  $a_i$  und  $b$  linear im zweiten Argument sind.

Es gilt folgendes

### 1.3.11 LEMMA

Vor.:  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) erfüllen die Voraussetzung 1.3.8.

Beh.: Es gibt eine stetige, monoton wachsende Funktion  $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , so daß für  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  mit  $\|u\|_{1,p} \leq R$  gilt:

$$|a(u, v)| \leq \gamma(R) \|v\|_{1,p,0}.$$

Beweis: vgl. z.B. CIARLET-SCHULTZ-VARGA [1] oder BARBU [1].

Für festes  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  ist  $a(u, \cdot)$  demzufolge ein stetiges lineares Funktional auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , das im folgenden mit  $Au$  bezeichnet sei:

$$1.3.12 \quad a(u, v) =: \langle Au, v \rangle \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Es gilt der wichtige

### 1.3.13 SATZ

Vor.:  $A: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  sei der durch 1.3.12, 1.3.8 und 1.3.9 definierte Operator ( $1/p + 1/p' = 1$ ).

Beh.: Die Einschränkung

$$A: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$

ist monoton und demistetig.

Beweis: vgl. z.B. BARBU [1].

### 1.3.14 BEMERKUNG

Manche Autoren (z.B. CIARLET-SCHULTZ-VARGA [1] ) verwenden den etwas schwächeren Stetigkeitsbegriff der "endlichen Stetigkeit" anstelle der Demistetigkeit.

Im folgenden spielen noch zwei Modifikationen der Voraussetzung

1.3.8 (b) eine Rolle:

1.3.8 (b)-strikt

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \eta)] (\xi_i - \eta_i) > 0 \quad \text{für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \neq \eta, x \in \Omega$$

1.3.8 (b)-gleichmäßig

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \eta)] (\xi_i - \eta_i) \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^p \quad \text{für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \text{ und } x \in \Omega$$

( $\alpha$  sei eine positive Konstante).

Soll in Voraussetzung 1.3.8 Teil (b) durch 1.3.8 (b)-strikt bzw. 1.3.8 (b)-gleichmäßig ersetzt werden, so wird dies durch die Notation: "es gelte 1.3.8 (strikt)" bzw. "es gelte 1.3.8 (gleichmäßig)" angedeutet.

Das folgende Lemma liefert Beispiele T-monotoner Operatoren:

### 1.3.15 LEMMA

Vor.:  $A: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ) sei der durch 1.3.9, 1.3.12 definierte Operator.

Beh.:

- (a) Gilt 1.3.8, so ist A T-monoton.
- (b) Gilt 1.3.8 (strikt), so ist A strikt T-monoton.
- (c) Gilt 1.3.8 (gleichmäßig), so ist A gleichmäßig T-monoton.

Beweis: Sei  $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$  mit  $(u-v)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ;

$\Omega_+ := \text{supp}((u-v)^+)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, (u-v)^+ \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [a_i(x, \nabla u) - a_i(x, \nabla v)] \frac{\partial}{\partial x_i} [(u-v)^+] dx \\ &\quad + \int_{\Omega} [b(x, u) - b(x, v)] (u-v)^+ dx \end{aligned}$$

(die Existenz der schwachen Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_i} (u-v)^+$  folgt aus den Verbandseigenschaften von  $W^{1,p}(\Omega)$  (vgl. 1.2.1 (b)).

Daher ist

$$\begin{aligned} \langle Au-Av, (u-v)^+ \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_+} [a_i(x, \nabla u) - a_i(x, \nabla v)] \frac{\partial}{\partial x_i} (u-v) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega_+} [b(x, u) - b(x, v)] (u-v) \, dx \\ &\geq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_+} [a_i(x, \nabla u) - a_i(x, \nabla v)] \frac{\partial}{\partial x_i} (u-v) \, dx \quad (*) \end{aligned}$$

(da  $b$  bzgl. des zweiten Arguments monoton; vgl. 1.3.8 (c)).

(a) folgt nun unmittelbar aus 1.3.8(b) und (\*).

(b) Gilt 1.3.8(b)-strikt, so folgt aus  $\langle Au-Av, (u-v)^+ \rangle = 0$  und (\*) die Beziehung:  $\text{grad } u = \text{grad } v$  in  $\Omega$ . Also gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  derart, daß  $u=v+\lambda$  fast überall in  $\Omega$  (vgl. z.B. ADAMS [1], S.59 f); wegen  $(u-v)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$  ist notwendig  $\lambda = 0$ . Daher ist  $u(x)=v(x)$  fast überall in  $\Omega$ , d.h. es gilt (b).

(c) Gilt 1.3.8 (b)-gleichmäßig, so ist also

$$\langle Au-Av, (u-v)^+ \rangle \geq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (u-v)^+ \right\|_p^p \geq \alpha \|(u-v)^+\|_{1,p,0}^p,$$

d.h.  $A$  ist gleichmäßig  $T$ -monoton.

### 1.3.16 KOROLLAR

Vor.:  $A: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  sei der durch 1.3.8 (gleichmäßig), 1.3.9, 1.3.12 definierte Operator.

Beh.: Die Restriktion

$$A: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{ist gleichmäßig monoton.}$$

Beweis: Lemmata 1.3.6, 1.3.15, Bemerkung 1.3.7.

### 1.3.17 BEMERKUNG

(a) Hängen die Funktionen  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) nicht nur von " $\nabla u$ ", sondern auch noch von " $u$ " ab, so ist  $A$  i.a. nicht mehr  $T$ -monoton.

(b) Der sogenannte Pseudo-Laplace-Operator  $A: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$

$$Au := - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right|^{p-2} \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) \quad (p \geq 2)$$

ist gleichmäßig T-monoton. 1.3.8 (b)-gleichmäßig folgt aus der Ungleichung

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y)(x-y) \geq 2^{2-p}|x-y|^p \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(vgl. EL KOLLI [1], GLOWINSKI-MAROCCO [1]). Die Pseudo-Laplace-Operatoren sind Beispiele für die bereits erwähnten Dualitätsabbildungen in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , d.h. es ist

$$\langle Au, u \rangle = \|u\|_{1,p,0}^p.$$

Für die Sobolev-Räume  $W^{1,p}(\Omega)$  haben sie ähnlichen Modellcharakter wie der übliche Laplace-Operator in  $W^{1,2}(\Omega)$  bei der Untersuchung elliptischer Randwertaufgaben.

(c) Ist  $p=2$ ,  $a_i \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$  ( $i=1, \dots, n$ ), so ist die folgende Elliptizitätsbedingung hinreichend für 1.3.8 (b)-gleichmäßig:

$$\sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial y_i} a_j(x,y) \right) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (\alpha > 0)$$

für alle  $x \in \Omega$ ,  $\xi, y \in \mathbb{R}^n$  (vgl. auch GAJEWSKI-GRÜGER-ZACHARIAS [1]). In einigen wichtigen Fällen (z.B. dem Operator der Minimalflächengleichung) hängt  $\alpha$  von  $\|y\|$  ab. Operatoren dieses Typs sind nur noch lokal gleichmäßig monoton in folgendem Sinn: sie sind gleichmäßig monoton auf jeder in  $W^{1,2}(\Omega)$  beschränkten Menge; oft kann man alle Überlegungen für gleichmäßig monotone Operatoren auf lokal gleichmäßig monotone Operatoren übertragen (vgl. BREZIS-STAMPACCHIA [1], BREZIS-KINDERLEHRER [1]).

Im folgenden werden noch einige Eigenschaften monotoner Operatoren benötigt:

#### 1.3.18 DEFINITION

(a) Ein monotoner Operator  $A: X \rightarrow X'$  heißt koerzitiv, falls für alle Folgen  $\{u_n\} \subseteq X$  mit  $\|u_n\|_X \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt:

$$\langle Au_n, u_n \rangle / \|u_n\|_X \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(b) Ein monotoner Operator  $A: X \rightarrow X'$  besitzt die (S)-Eigenschaft, wenn aus  $u_n \rightharpoonup u$  in  $X$  und  $\langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \rightarrow 0$  folgt:  $u_n \rightarrow u$  in  $X$ .

### 1.3.19 BEMERKUNG

(a) Jeder gleichmäßig  $\rho$ -monotone Operator  $A: X \rightarrow X'$  ist koerzitiv.

(b) Jeder d-monotone Operator  $A: X \rightarrow X'$  ist koerzitiv.

(c) Jeder gleichmäßig  $\rho$ -monotone Operator  $A: X \rightarrow X'$  besitzt die (S)-Eigenschaft.

(d) Ist  $A: X \rightarrow X'$  demistetig, strikt monoton und koerzitiv, so existiert  $A^{-1}: X' \rightarrow X$  und ist strikt monoton, beschränkt und demistetig. Besitzt  $A$  darüberhinaus die (S)-Eigenschaft, so ist  $A^{-1}$  sogar stetig.

(die Beweise der hier zitierten Aussagen findet man in GAJEWSKI-GRÜGER-ZACHARIAS [1], S.62 ff.).

### 1.4 GLEICHUNGEN MIT MONOTONEN OPERATOREN; DAS GALERKIN-VERFAHREN

Im folgenden werden nur die wichtigsten Ergebnisse zitiert:

#### 1.4.1 SATZ (BROWDER-MINTY)

Vor.:  $A: X \rightarrow X'$  sei demistetig, monoton und koerzitiv,  $f \in X'$ .

Beh.: Die Menge der Lösungen der Gleichung

$$1.4.2 \quad Au = f$$

ist nichtleer, abgeschlossen und konvex.

Beweis: vgl. z.B. BROWDER [1], LIONS [1] .

#### 1.4.3 KOROLLAR

Vor.: wie in 1.4.1;  $A$  sei darüberhinaus strikt monoton .

Beh.: Zu jedem  $f \in X'$  existiert genau eine Lösung  $u$  der Gleichung  $Au = f$  .

Sei nun  $V$  ein endlichdimensionaler Teilraum von  $X$ .

#### 1.4.4 DEFINITION

Ein Element  $u_G \in V$  heißt GALERKIN-Näherung der Lösung  $u$  von 1.4.2, falls

$$1.4.5 \quad \langle Au_G, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt.

#### 1.4.6 SATZ

Vor.:  $A: X \rightarrow X'$  sei demistetig, gleichmäßig  $\rho$ -monoton und koerzitiv.

Beh.: Es existiert in  $V \subset X$  genau eine GALERKIN-Näherung der Lösung  $u$  von 1.4.2 ; es ist

$$\rho(\|u_G - u\|_X) \leq \langle Au_G - Au, v - u \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Beweis: vgl. z.B. GAJEWSKI-GRÜGER-ZACHARIAS [1] , S. 80 ff.

#### 1.4.7 BEMERKUNG

In den in dieser Arbeit interessierenden Fällen ist  $X$  ein Sobolevraum  $W_0^{m,p}(\Omega)$ ; für diese Räume wurden in den letzten Jahren (vgl. STRANG-FIX [1], BABUSKA-AZIZ [1] ) eine ganze Reihe endlichdimensionaler Unterräume konstruiert, die sich zur Durchführung des Galerkin-Verfahrens bei elliptischen Randwertaufgaben besonders gut eignen. Auf diese sogenannten finite Elemente Räume wird an späterer Stelle noch genauer eingegangen.

#### 1.5 VARIATIONSUNGLEICHUNGEN

Sei  $H$  ein reeller Hilbertraum,  $a$  eine stetige, symmetrische, positiv definite Bilinearform auf  $H \times H$ .

Bekanntlich läßt sich in diesem Fall die Lösung der Minimalaufgabe

$$\min_{u \in H} [ a(u,u) - 2\langle f, u \rangle ] \quad ! \quad (f \in H)$$

durch Lösung der folgenden Gleichung finden:

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in H .$$

Betrachtet man die allgemeinere Minimalaufgabe

$$\min_{u \in K} [ a(u,u) - 2\langle f, u \rangle ] \quad ! \quad (f \in H)$$

wo  $K$  eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von  $H$  ist, so kann man die Minimallösung (deren Existenz man beweisen kann) charakterisieren durch

$$a(u,u) - 2\langle f, u \rangle \leq a(\lambda v + (1-\lambda)u, \lambda v + (1-\lambda)u) - 2\langle f, \lambda v + (1-\lambda)u \rangle$$

für alle  $v \in K, \lambda \in [0,1]$  .

Formt man diese Beziehung um, so erhält man die Ungleichung

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \text{für alle } v \in K .$$

Ungleichungen diesen Typs nennt man Variationsungleichungen; geht man analog zu 1.3.12 vor, so kann man auch schreiben:

$$\langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \text{für alle } v \in K$$

oder auch

$$\langle f - Au, v - u \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in K.$$

Vergißt man nun die Herkunft (die ursprüngliche Minimalaufgabe), so kann man Variationsungleichungen allgemeiner auch so definieren:

### 1.5.1 DEFINITION

Sei  $X$  ein reflexiver, reeller Banachraum;  $A: X \rightarrow X'$ ;  $K \subseteq X$  sei nichtleer, abgeschlossen und konvex.

Die Aufgabe: gesucht ist ein  $u \in K$  mit

$$1.5.2 \quad \langle f - Au, v-u \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in K$$

heißt Variationsungleichung.

Die Existenz von Lösungen einer Variationsungleichung liefert der

### 1.5.3 SATZ

Vor.:  $A: X \rightarrow X'$  sei monoton, beschränkt, demistetig und koerzitiv.

Beh.: Die Menge der Lösungen der Variationsungleichung 1.5.2 ist nichtleer, abgeschlossen und konvex.

Beweis: vgl. z.B. LIONS [1], S. 245 ff.

### 1.5.4 BEMERKUNG

Eine allgemeinere Form des Satzes 1.5.3 findet man bei BREZIS [1] und AUSLENDER [1]. Erwähnenswert ist, daß für beschränktes  $K$  auf die Koerzitivität von  $A$  verzichtet werden kann; in den in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen ist  $K$  jedoch nicht beschränkt.

Offensichtlich gilt folgendes einfache

### 1.5.5 KOROLLAR

Vor.: Wie in 1.5.3;  $A$  sei darüberhinaus strikt monoton.

Beh.: Die Variationsungleichung 1.5.2 besitzt genau eine Lösung.

Die folgende Äquivalenz wird beim Umgang mit Variationsungleichungen oft ausgenutzt:

### 1.5.6 LEMMA (MINTY)

Vor.:  $A: X \rightarrow X'$  sei monoton, demistetig;  $K \subseteq X$  abgeschlossen und konvex;  
 $u \in K, f \in X'$ .

Beh.: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a)  $\langle f - Au, v-u \rangle \leq 0$  für alle  $v \in K$
- (b)  $\langle f - Av, v-u \rangle \leq 0$  für alle  $v \in K$ .

Beweis: vgl. AUSLENDER [1], S.39

Die praktische Lösung der Problemstellung 1.5.7 ist Gegenstand dieser Arbeit:

### 1.5.7 PROBLEMSTELLUNG (Elliptische Variationsungleichungen mit Hindernisnebenbedingungen)

Sei  $Y := W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $X := W_0^{1,p}(\Omega)$ ;  $A: Y \rightarrow X'$  sei wie in 1.3.8, 1.3.9, 1.3.12 definiert.

$$K_\psi := \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid u \geq \psi \text{ f.ü. in } \Omega\}$$

$$K^\phi := \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid u \leq \phi \text{ f.ü. in } \Omega\}$$

mit Funktionen  $\psi, \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\psi^+, \phi^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\psi \leq \phi$  in  $\Omega$ ;  $K := K_\psi \cap K^\phi$ .  
 (Dann ist die Menge  $K_\psi \cap K^\phi$  nichtleer, abgeschlossen und konvex.)

Sei  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ ; gesucht ist die Lösung  $u$  der Variationsungleichung

$$u \in K, \quad \langle f - Au, v-u \rangle \leq 0 \text{ für alle } v \in K_\psi \cap K^\phi, \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} 1.5.8 \quad u \in K, \quad & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i(x, \nabla u) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \, dx + \int_{\Omega} [b(x, u) - f](v-u) \, dx \geq 0 \\ & \text{für alle } v \in K. \end{aligned}$$

### 1.5.9 BEMERKUNG

(a) Aus formalen Gründen soll auch  $\phi = \infty$  und  $\psi = -\infty$  zugelassen werden; es bedeute z.B.  $\phi = +\infty$ , daß das Hindernis  $\phi$  "fehlt". Die dadurch erforderlichen Fallunterscheidungen in den Beweisen werden meist weggelassen.

(b) Ist  $A$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  koerzitiv, so liefert Satz 1.5.3 die Existenz einer Lösung der Variationsungleichung 1.5.8 in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ; ist  $A$  darüberhinaus strikt monoton (d.h. gilt 1.3.8 (b)-strikt), so ist diese Lösung auch eindeutig bestimmt.

Im folgenden soll noch kurz auf die bekannten Regularitätsresultate für elliptische Variationsungleichungen mit Hindernisnebenbedingungen eingegangen werden. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Funktionen  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ),  $b$ , die Hindernisse  $\psi$  und  $\phi$  und die Inhomogenität  $f$  ge- die Lösung der Variationsungleichung 1.5.8 sogar zu  $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$  ( $r \geq p$ ). Im Gegensatz zur Regularitätstheorie elliptischer Randwert- probleme besitzt die Lösung einer Variationsungleichung selbst bei be- liebig glatten Vorgaben (das sind: die Koeffizienten  $a_i$ , Halblinearität  $b$ , Hindernisse  $\psi$ ,  $\phi$ , Inhomogenität  $f$ , Rand  $\partial\Omega$  des Gebietes) i.a. keine höheren Differenzierbarkeitseigenschaften (ein Beispiel findet man in LIONS [1], S.255).

### 1.5.10 SATZ (BREZIS)

Vor.: (a)  $p=2$

$$(b) a_i(x, \xi) := \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \xi_j \quad (i=1, \dots, n; \xi \in \mathbb{R}^n)$$

mit  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ;

(c) 1.3.8 (gleichmäßig)

(d)  $\phi, \psi$  wie in 1.5.7; es sei  $A\psi, A\phi \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$  mit

$$(A\psi)^+, (A\phi)^- \in L^r(\Omega) \quad (r \geq 2) \text{ und } f \in L^r(\Omega) \quad (\text{vgl. 1.2})$$

(e)  $b(x, z) := \beta(x)z, \beta \geq 0$  f.ü. in  $\Omega$ ,  $\beta \in L^\infty(\Omega)$  ;

(f) für die Lösung  $u$  der Randwertaufgabe  $Au = f$  existiere eine a-priori-Abschätzung:  $\|u\|_{2,r} \leq c \|f\|_r$  .

Beh.: Es existiert eine eindeutige Lösung des Problems 1.5.7; die Lösung  $u$  liegt in  $W^{2,r}(\Omega) \cap K_{\psi, \phi} \cap K^\dagger$  und es gilt die a-priori-Abschätzung:

$$\|u\|_{2,r} \leq c(\|f\|_r + \|(A\psi)^+\|_r + \|(A\phi)^-\|_r)$$

mit einer von  $A, r, n, \Omega$  abhängenden Konstanten  $c > 0$ .

Beweis: BREZIS [2]

### 1.5.11 BEMERKUNG

(a) Gilt  $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\Omega)$ , so ist offenbar  $A\psi \in L^\infty(\Omega)$ ; insbesondere ist dann auch  $(A\psi)^+ \in L^r(\Omega)$ .

(b) Ist  $\Omega$  konvex,  $\psi \in W^{1,r}(\Omega)$  eine konvexe Funktion, so ist unter den Voraussetzungen des Satzes 1.5.10  $(A\psi)^+ \in L^r(\Omega)$  (vgl. BREZIS [2], S. 9) .

(c) Lokale Regularitätsaussagen kann man unter etwas schwächeren Voraussetzungen gewinnen (vgl. BREZIS [2], S. 9) .

(d) In einer Arbeit von WHITEMAN [1], die sich mit finite Elemente Approximationen von semilinearen Variationsungleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \, dx \geq \int_{\Omega} \phi(u)(v-u) \, dx \quad \text{für alle } v \in K_\psi$$

beschäftigt, wird das Fehlen von Regularitätsaussagen für solche Probleme (für nichtlineare Funktionen  $\phi$ ) bemerkt. Tatsächlich scheinen Regularitätsaussagen für diesen Problemtyp in der Literatur nicht vorzukommen. Aus diesem Grunde soll im folgenden für bestimmte Semilinearitäten  $\phi$  gezeigt werden, wie man Regularitätsaussagen für solche semilinearen Variationsungleichungen aus Satz 1.5.10 gewinnen kann.

### 1.5.12 LEMMA

Vor.:  $A: X \rightarrow X'$  sei koerzitiv,  $B: X \rightarrow X'$  sei monoton.

Beh.:  $A + B$  ist koerzitiv.

Beweis: Sei  $\{u_n\} \in X$ ,  $\|u_n\|_X \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \langle (A+B)u_n, u_n \rangle &= \langle Au_n, u_n \rangle + \langle Bu_n - Bo, u_n \rangle + \langle Bo, u_n \rangle \\ &\geq \langle Au_n, u_n \rangle + \langle Bo, u_n \rangle \quad (\text{da } B \text{ monoton}) \\ &\geq \langle Au_n, u_n \rangle - \|Bo\|_{X'} \cdot \|u_n\|_X \end{aligned}$$

Hieraus folgt: für  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\langle (A+B)u_n, u_n \rangle}{\|u_n\|_X} \rightarrow \infty, \quad \text{da } A \text{ koerzitiv.} \quad \blacksquare$$

Im folgenden Korollar wird o.B.d.A.  $\phi = +\infty$  angenommen; der allgemeine Fall folgt analog.

### 1.5.13 KOROLLAR

Vor.: (a) Es sei  $A$  wie in 1.5.7 mit  $b(x,z) := \beta(x)z + \gamma(x,z)$ ;

für  $\gamma=0$  seien die Voraussetzungen von 1.5.10 erfüllt.

(b) Für alle  $x \in \Omega$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  gelte:  $(\gamma(x,\xi) - \gamma(x,\eta))(\xi - \eta) \geq 0$ ;

$$|\gamma(x,\xi)| \leq \alpha(x) + c|\xi|^{s/2}, \quad s \in \begin{cases} [2, 2n/(n-2)) & , \text{ falls } n > 2 \\ [2, \infty) & , \text{ falls } n = 2 \end{cases}$$

$\alpha \in L^r(\Omega)$  ( $r$  wie in 1.5.10).

Beh.: Es existiert genau eine Lösung  $u$  des Problems 1.5.7 (mit  $p=2$ );

es ist  $u \in K \cap W^{2,r}(\Omega)$ .

Beweis: Aufgrund der an  $\gamma$  gestellten Wachstumsbedingung gilt: für

$v \in L^{p_0}(\Omega)$  ( $p_0 \geq 2$ ) ist  $\gamma(\cdot, v) \in L^q(\Omega)$ ,  $p_1 = \min(r, 2p_0/s)$ .

Sei nun  $A_0: W^{1,2}_0(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  definiert durch:

$$\langle A_0 u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u \frac{\partial}{\partial x_j} v \, dx + \int_{\Omega} \beta(x) u v \, dx \quad \text{f.a. } v \in W^{1,2}_0(\Omega).$$

$B_0: W^{1,2}_0(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  sei definiert durch  $\langle B_0 u, v \rangle := \int_{\Omega} \gamma(x, u) v \, dx$  für alle  $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ ; es ist  $B_0 u \in L^2(\Omega)$  wegen der an  $\gamma$  gestellten Wachstumsbedingung.

$A_0$  ist gleichmäßig monoton, insbesondere also auch koerzitiv, und demistetig;  $B_0$  ist monoton und demistetig. Nach 1.5.12 ist  $A_0 + B_0$  koerzitiv, nach 1.3.11, 1.3.13 beschränkt und demistetig. Also existiert nach Satz 1.5.3 eine Lösung der Variationsungleichung 1.5.8 in  $W^{1,2}_0(\Omega) \cap K$ .

Setze  $\bar{f} := f - B_0 u$ ; es ist  $\bar{f} \in L^2(\Omega)$ .  $u$  ist also Lösung der Variationsungleichung

$$\langle \bar{f} - A_0 u, v - u \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in K.$$

Nach Satz 1.5.10 ist  $u$  sogar aus  $K \cap W^{1,2}_0(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ , mit

$$p \in \begin{cases} [2, 2n/(n-4)] & , \text{ falls } n > 4 \\ [2, \infty) & , \text{ falls } n = 4 \\ \{\infty\} & , \text{ falls } n < 4 \end{cases}$$

(vgl. Sobolev'schen Einbettungssatz 1.1.1) . Hieraus folgt:

$$B_0 u \in L^{p_1}(\Omega), \quad p_1 = 2p/s ;$$

Man wähle  $p$  hinreichend groß, so daß  $2p/s > 2$ . Dann ist

$$\bar{f} \in L^{p_2}(\Omega), \quad p_2 = \min(r, 2p/s) .$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Regularitätsarguments folgt:

$$\bar{f} \in L^r(\Omega).$$

Aus Satz 1.5.10 folgt daher:  $u \in K \cap W^{2,r}(\Omega)$  . ■

#### 1.5.14 KOROLLAR

Vor.: wie in 1.5.13, jedoch erfülle  $\gamma$  nicht mehr notwendig die dort geforderte Wachstumsbedingung; es existiere genau eine Lösung  $u \in L^\infty(\Omega)$  der Variationsungleichung 1.5.8 (mit  $p=2$ ) .

Beh.: Dann ist  $u \in K \cap W^{2,r}(\Omega)$  .

Beweis: Man betrachte das Problem 1.5.8 mit  $b(x,z) := \beta(x)z + \Gamma(x,z)$ ,

wo

$$\Gamma(x,z) := \begin{cases} \gamma(x,z) & \text{für } |z| \leq \|u\|_\infty + 1 \\ \gamma(x, \text{sign}(z)[\|u\|_\infty + 1]) & \text{für } |z| \geq \|u\|_\infty + 1 \end{cases}$$

und wende hierauf 1.5.13 an. ■

#### 1.5.15 BEMERKUNG

Unter etwas modifizierten Voraussetzungen über die Daten der Variationsungleichung gibt es auch Regularitätsresultate analog zu 1.5.10, falls die Koeffizienten  $a_{ij}$  nicht mehr die Symmetriebedingung  $a_{ij}=a_{ji}$  erfüllen (vgl. BREZIS-STAMPACCHIA [1], S.164, STAMPACCHIA [2], S.142 ).

Regularitätsaussagen für nichtlineare Variationsungleichungen (mit Hindernisnebenbedingungen) gibt es z.Zt. (Mitte 1977) nur unter einigen einschränkenden Voraussetzungen an die Daten:

### 1.5.16 SATZ (BREZIS-KINDERLEHRER)

Vor.: (a) 1.3.8 mit  $b = 0$ ; 1.3.8 (gleichmäßig) mit  $p=2$ ;

$$(b) \ a_i \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$(c) \ f \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$(d) \ \psi \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \psi \leq 0 \text{ auf } \partial\Omega; \ K_\psi := \{v \mid v \geq \psi \text{ f.ü}\} \cap W_0^{1,\infty}(\Omega).$$

Beh.: Es existiert genau eine Lösung  $u$  der Variationsungleichung

1.5.8 ( $p=2$ ); es ist

$$u \in C^{1,1}(\Omega) \cap K_\psi.$$

Beweis: BREZIS-KINDERLEHRER [1]

### 1.5.17 BEMERKUNG

(a) Bemerkenswert an 1.5.16 ist, daß keine Symmetriebedingung an die Funktionalmatrix des Vektorfeldes  $(a_i)_{i=1,\dots,n}$  gestellt wird. Die Herkunft der Variationsungleichung 1.5.8 ist also nicht notwendig ein Minimalproblem (vgl. die Bemerkungen vor 1.5.1).

(b) 1.5.16 gilt auch für lokal gleichmäßig monotone Vektorfelder  $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ ; dabei heiße ein Vektorfeld  $(a_i)$  lokal gleichmäßig monoton, falls gilt:

für jede kompakte Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  existiert ein  $\alpha(M) > 0$ , so daß für alle  $(\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n) \in M$  und alle  $x \in \Omega$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \eta)](\xi_i - \eta_i) \geq \alpha(M) \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2$$

(vgl. 1.3.17 (c)).

### 1.5.18 BEMERKUNG

Bestimmte lineare elliptische Variationsungleichungen mit Gradientenbeschränkungen können ebenso als Variationsungleichung mit zweiseitigen Hindernisnebenbedingungen formuliert werden (vgl. BREZIS-SIBONY [1], GLOWINSKI-LIONS-TREMOLIERES [1]). Ein Problem diesen Typs ist etwa die elasto-plastische Torsion eines zylindrischen Balkens:

Formulierung als Minimalproblem:

$$\min_{v \in K} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - C \int_{\Omega} v \, dx \right) \quad (C \in \mathbb{R})$$

mit  $K := \{ v \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid |\nabla v| \leq 1 \text{ fast überall in } \Omega \}$  ;

Formulierung als Variationsungleichung:

$$C \int_{\Omega} (v-u) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u) \, dx \leq 0 \text{ für alle } v \in K ;$$

Äquivalente Formulierung als Variationsungleichung mit zweiseitigen Hindernisnebenbedingungen:

$$C \int_{\Omega} (v-u) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u) \, dx \leq 0 \text{ für alle } v \in \hat{K},$$

$$K := \{ v \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid -\delta(\cdot, \partial\Omega) \leq v \leq \delta(\cdot, \partial\Omega) \text{ f.ü. in } \Omega \} ;$$

dabei ist  $\delta(x, \partial\Omega) :=$  Abstand des Punktes  $x$  vom Rand des Gebietes.

Die beiden Variationsungleichungen sind jedoch nur für hinreichend glatten Rand von  $\Omega$  äquivalent (etwa  $\partial\Omega$  aus der Klasse  $C^2$ ), da nur für solche glatten Ränder das Hindernis  $\delta(\cdot, \partial\Omega)$  die erforderlichen Regularitätseigenschaften besitzt.

Regularitätssätze für Lösungen von Variationsungleichungen mit Gradientenbeschränkungen sind ebenfalls bekannt (vgl. BREZIS-STAMPACCHIA [1], BREZIS [2] ) .

## KAPITEL II

### EIN PENALTY-VERFAHREN ZUR LÖSUNG VON ELLIPTISCHEN VARIATIONSUNGLEICHUNGEN MIT HINDERNISNEBENBEDINGUNGEN

#### 2.1 EINLEITUNG

Im folgenden sei  $X$  ein reflexiver Banachraum; es sei  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Eine Funktion  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt

konvex, falls ihr Epigraph  $\text{epi } f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$

eine konvexe Teilmenge von  $X \times \mathbb{R}$  ist;

eigentlich konvex, falls  $f$  konvex, nicht identisch  $+\infty$  und nirgends  $-\infty$  ist;

schwach unterhalbstetig, falls die Mengen  $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  abgeschlossen sind.

Sei nun  $f$  eine eigentlich konvexe Funktion auf  $X$ ; ein Element  $x' \in X'$  heißt Subgradient von  $f$  im Punkt  $u$ , falls

$$f(x) - f(u) \geq \langle x', x - u \rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

$\partial f(u)$  bezeichne die Menge der Subgradienten von  $f$  im Punkt  $u$ . Die Abbildung

$$u \mapsto \partial f(u)$$

heißt Subgradient (oder Subdifferential) von  $f$ .  $\partial f$  ist im allgemeinen eine multi-wertige Abbildung:

$$\partial f : X \rightarrow 2^{X'}.$$

Ist  $f$  Gateaux-differenzierbar in  $u$ , so ist  $\partial f(u) = \{f'(u)\}$  (vgl. z.B. EKELAND-TEMAM [1]).

Ist  $K \subseteq X$  abgeschlossen und konvex, so heißt die Funktion  $\chi_K : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,

$$\chi_K(u) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } u \notin K \\ 0, & \text{falls } u \in K \end{cases}$$

Indikatorfunktion von  $K$ .  $\chi_K$  ist konvex und schwach unterhalbstetig. Es ist

$$x' \in \partial \chi_K(u) \iff \chi_K(u) = 0 \text{ und } \langle x', x - u \rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in K.$$

Also kann man die Variationsungleichung

$$1.5.2 \quad \langle f - Au, v - u \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in K$$

auch schreiben als

$$2.1.1 \quad f - Au \in \partial x_K(u) \quad .$$

Dies ist eine "Gleichung" mit multi-wertigen monotonen Operatoren (vgl. BROWDER [1] ).

"Approximiert" man nun den multi-wertigen Operator  $\partial x_K$  durch eine Folge gewöhnlicher monotoner Operatoren, so definieren die so entstehenden "Näherungsprobleme" eine Folge von "Näherungslösungen"  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Ziel ist es, die "Approximation" von  $\partial x_K$  so durchzuführen, daß  $u_n \rightarrow u$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Ist der monotone Operator  $A: X \rightarrow X'$  Gradient eines endlichen, konvexen Funktionals  $F$ , so heißt  $A$  Potentialoperator,  $F$  Potential von  $A$  (vgl. LANGENBACH [1], GAJEWSKI-GRÜGER-ZACHARIAS [1] ). Ist  $A$  nun ein monotoner Potentialoperator mit Potential  $F$ , so ist  $u$  Lösung der restringierten Minimaufgabe

$$2.1.2 \quad \inf_{v \in K} ( F(v) - \langle f, v \rangle ) !$$

dann und nur dann, wenn  $u$  Lösung der Variationsungleichung 1.5.2 ist (vgl. EKELAND-TEMAM [1] ). In diesem Fall kann man die Vorgehensweise,  $\partial x_K(u)$  durch gewöhnliche monotone Operatoren zu "approximieren", als eine Penalty-Methode deuten:

Die Aufgabe 2.1.2 ist äquivalent zur nichtrestringierten Minimaufgabe

$$2.1.3 \quad \inf_{v \in X} ( F(v) - \langle f, v \rangle + x_K(v) ) ! \quad .$$

"Approximiert" man nun  $x_K$  durch endliche, konvexe, stetig differenzierbare Funktionen  $x_{K,n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), so erhält man für die Lösungen  $u_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) der Näherungsprobleme

$$2.1.4 \quad \inf_{v \in X} ( F(v) - \langle f, v \rangle + x_{K,n}(v) ) !$$

die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$2.1.5 \quad f - Au_n = x'_{K,n}(u_n)$$

(" ' " bedeute die Gateaux-Ableitung eines Funktionals) .

Interpretiert man die Gleichung 2.1.5 nun direkt als "Approximation" von 2.1.1, so kann man die Herleitung von 2.1.5 aus einem Minimierungsproblem wieder vergessen: das Penalty-Verfahren gestattet es, auch Probleme zu behandeln, die nicht von einer Minimierungsaufgabe herrühren.

Da die Funktionen  $\chi_{K,n}$  als konvex vorausgesetzt wurden, ist 2.1.5 eine Gleichung, deren Lösbarkeit man mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren untersuchen kann. Sinnvoll ist eine solche Vorgehensweise natürlich nur dann, wenn die "Approximation" von  $\chi_K$  so durchgeführt wird, daß die Lösungen  $u_n$  von 2.1.5 für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Lösung  $u$  der Variationsungleichung 1.5.2 konvergieren.

Penalty-Verfahren zur Lösung von Variationsungleichungen werden z.B. in LIONS [1], S. 368 ff, GLOWINSKI-LIONS-TREMOLIERES [1] beschrieben. Die in der vorliegenden Arbeit konstruierten Penalty-Verfahren nutzen stark die besondere Struktur der zugrundeliegenden konvexen Menge  $K$  aus; sie lassen sich nicht unter die dort beschriebenen Verfahren einordnen.

Penalty-Verfahren ähnlich der hier untersuchten Art wurden von LEWY-STAMPACCHIA [1], STAMPACCHIA [1], [2], [4] zum Nachweis von Regularitätseigenschaften von Lösungen linearer Variationsungleichungen benutzt. Das Studium dieser Arbeit gab den Anstoß zur Untersuchung der Frage, ob sich diese Verfahren auch praktisch anwenden lassen. Es stellt sich heraus, daß sich tatsächlich praktikable Verfahren konstruieren lassen, die bezüglich der Konvergenzordnung bei Verwendung der finite Elemente Methode anderen bekannten Verfahren (FALK [1], [2], MOSCO-STRANG [1], GLOWINSKI-LIONS-TREMOLIERES [1], [2]) ebenbürtig sind. Darüberhinaus können für die hier angewandten Penalty-Verfahren auch Konvergenzordnungen bei Problemen angegeben werden, die bislang in der Literatur nicht behandelt wurden.

## 2.2 EINE KLASSE VON PENALTY-VERFAHREN ZUR LÖSUNG NICHTLINEARER VARIATIONSUNGLEICHUNGEN MIT HINDERNISNEBENBEDINGUNGEN

Zunächst soll die in 2.1 angedeutete Vorgehensweise präzisiert werden.

Sei  $K_\psi$ ,  $K^\phi$  wie in 1.5.7,  $K := K_\psi \cap K^\phi$ ; die Indikatorfunktion von  $K$  läßt sich in folgender Weise darstellen:

$$2.2.1 \quad \chi_K(u) = \int_{\Omega} [\chi_{\mathbb{R}_+}(u-\psi) + \chi_{\mathbb{R}_+}(\phi-u)] \, dx \quad \text{für } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Dabei ist  $\chi_{\mathbb{R}_+}$  die Indikatorfunktion von  $\mathbb{R}_+$ . Sei nun  $\chi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von konvexen, stetig differenzierbaren Funktionen mit

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(\xi) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

2.2.2

$$(ii) \quad \chi_n(\xi) = 0 \quad \text{für } \xi \leq \pi_n; \{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sei eine monotone, positive Nullfolge ("Penalty-Parameter").}$$

Ferner gelte die Wachstumsbedingung

$$|\chi_n(\xi)| \leq \alpha_n + \beta_n |\xi|^s$$

mit  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}_+$ ,

$$s \in \begin{cases} [2, np/(n-p)] & , \text{ falls } n > p \\ [2, \infty) & , \text{ falls } n \leq p \end{cases}.$$

Dann ist  $\chi_{K,n}$ ,

$$\chi_{K,n}(u) := \int_{\Omega} [\chi_n(u-\psi) + \chi_n(\phi-u)] \, dx \quad \text{für } u \in W^{1,p}(\Omega)$$

ein endliches, konvexes Funktional auf  $W^{1,p}(\Omega)$ , mit Gateaux-Ableitung  $\chi'_{K,n}$ , welche durch

$$\langle \chi'_{K,n}(u), v \rangle = \int_{\Omega} [\chi'_n(u-\psi) - \chi'_n(\phi-u)] \, v \, dx \quad \text{für alle } u, v \in W^{1,p}(\Omega)$$

gegeben ist.

### 2.2.3 LEMMA

$\chi'_{K,n} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  ist ein T-monotoner Operator, dessen Einschränkung auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$  demistetig ist.

Beweis:

Demistetigkeit: Spezialfall von 1.3.13 (man setze  $a_i \equiv 0$  ( $1 \leq i \leq n$ )); vgl. auch BARBU [1], S.49 .

T-Monotonie:

Seien  $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $(u-v)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ; dann ist

$$\langle \chi'_{K,n}(u) - \chi'_{K,n}(v), (u-v)^+ \rangle =$$

$$\int_{\Omega} (\chi'_n(u-\psi) - \chi'_n(v-\psi))(u-v)^+ dx + \int_{\Omega} (\chi'_n(\phi-v) - \chi'_n(\phi-u))(u-v)^+ dx$$

$\geq 0$ , da  $\chi'_n$  als Ableitung einer konvexen Funktion monoton wachsend ist.

■

Insbesondere folgt nun aus Lemma 1.3.5, daß  $\chi'_{K,n} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  ein monotoner Operator ist.

Um die Lösbarkeit der Gleichung 2.1.5 zu zeigen, muß man die Voraussetzungen von Satz 1.4.1 nachprüfen; zu zeigen ist lediglich noch die Koerzitivität von  $A + \chi'_{K,n}$ :

### 2.2.4 LEMMA

Vor.:  $A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  sei koerzitiv, monoton und demistetig.

Beh.: Dann ist auch der Operator

$$A + \chi'_{K,n} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$

monoton, demistetig und koerzitiv.

Beweis: vgl. 1.5.12

■

Die nun folgenden Voraussetzungen über den Operator A und die Hindernisse  $\psi$  und  $\phi$  sollen von nun an stets gelten:

### 2.2.5 VORAUSSETZUNGEN

(a) A sei der durch 1.3.8 (strikt), 1.3.9, 1.3.12 definierte Operator; darüberhinaus sei A koerzitiv in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

(b) Es sei  $\phi - \psi > \pi_1$  f.ü. in  $\Omega$ ; ferner sei  $A\psi - f, A\phi - f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$  mit  $(A\psi - f)^+, (A\phi - f)^- \in L^\infty(\Omega)$  (vgl. auch 1.5.10). Es gelte:

$$\chi_n'(0) \leq -\max(\|(A\psi - f)^+\|_\infty, \|(A\phi - f)^-\|_\infty).$$

Die notwendigen Modifikationen in 2.2.5, falls eines der Hindernisse fehlt, sind offensichtlich.

### 2.2.6 BEMERKUNG

(a) Ist  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $a_i \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$ ,  $b \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ , so ist

$$A\psi \in L^\infty(\Omega) \subseteq (W_0^{1,p}(\Omega))^*.$$

(b) Ist  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ , A der Pseudo-Laplace-Operator (vgl. 1.3.17), so ist ebenfalls  $A\psi \in L^\infty(\Omega) \subseteq (W_0^{1,p}(\Omega))^*.$

(c) Da A strikt monoton,  $\chi_{K,n}'$  monoton, ist  $A + \chi_{K,n}'$  ebenfalls strikt monoton; aus 1.4.3 folgt daher (hierzu wird 2.2.5 (b) nicht benötigt): zu jedem  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$  existiert genau eine Lösung  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  der Gleichung

$$2.1.5 \quad Au_n + \chi_{K,n}'(u_n) = f.$$

Der folgende Satz über die Lösungen von 2.1.5 spielt eine Schlüsselrolle in den weiteren Überlegungen:

### 2.2.7 SATZ

Beh.: Die Lösung  $u_n$  von 2.1.5 liegt in K.

Beweis: Da  $(\psi - u_n)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle A\psi - Au_n, (\psi - u_n)^+ \rangle &= \langle A\psi - f + \chi_{K,n}'(u_n), (\psi - u_n)^+ \rangle \\ &\leq \langle A\psi - f + \chi_{K,n}'(\psi), (\psi - u_n)^+ \rangle \quad (\text{da } \chi_{K,n}' \text{ T-monoton}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \langle \chi_{K,n}'(\psi), (\psi - u_n)^+ \rangle &= \int_{\Omega} \chi_n'(0)(\psi - u_n)^+ dx - \int_{\Omega} \chi_n'(\phi - \psi)(\psi - u_n)^+ dx \\ &= \int_{\Omega} \chi_n'(0)(\psi - u_n)^+ dx \end{aligned}$$

(nach 2.2.2 (ii), 2.2.5 (b)). Daher ist

$$\langle A\psi - Au_n, (\psi - u_n)^+ \rangle \leq \int_{\Omega} (A\psi - f + \chi'_n(0))(\psi - u_n)^+ dx \leq 0$$

(nach 2.2.5 (b)).

Aus der strikten T-Monotonie von A folgt:  $u_n \geq \psi$ ; analog zeigt man:  $u_n \leq \phi$ . ■

Im folgenden sollen nun Fehlerabschätzungen für die Näherungsprobleme 2.1.5 hergeleitet werden:

### 2.2.8 SATZ

Bez.: u sei die Lösung der Variationsungleichung 1.5.8,  $u_n$  sei die Lösung von 2.1.5.

Beh.:

$$\langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \leq \pi_n |\chi'_n(0)| [\mu(\{x | 0 \leq u_n - \psi < \pi_n\}) + \mu(\{x | 0 \leq \phi - u_n < \pi_n\})]$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle &= \langle Au_n - f, u_n - u \rangle + \langle f - Au, u_n - u \rangle \\ &\leq \langle Au_n - f, u_n - u \rangle \quad (\text{nach 2.2.7, 1.5.8}) \\ &= -\langle \chi'_{K,n}(u_n), u_n - u \rangle \quad (\text{nach 2.1.5}) \\ &\leq - \int_{\Omega_0} \chi'_n(u_n - \psi)(u_n - u) dx + \int_{\Omega_1} \chi'_n(\phi - u_n)(u_n - u) dx \\ (\text{mit } \Omega_0 &:= \{x \mid \psi + \pi_n > u_n > u\}, \Omega_1 := \{x \mid \phi - \pi_n < u_n < u\}) \\ &\leq \pi_n |\chi'_n(0)| [\mu(\Omega_0) + \mu(\Omega_1)] \end{aligned}$$

■

Dieser Satz hat eine Reihe von wichtigen Folgerungen:

### 2.2.9 KOROLLAR

Vor.: A sei gleichmäßig monoton in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Beh.: Es existiert eine Konstante  $c > 0$ , so daß

$$\|u - u_n\|_{1,p,0} \leq c (\pi_n |\chi'_n(0)|)^{1/p}$$

## 2.2.10 KOROLLAR

Vor.: (a) A besitze die (S)-Eigenschaft;

(b)  $u_n \rightharpoonup u$  für  $n \rightarrow \infty$ ;

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n |x'_n(0)| = 0$

Beh.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{1,p,0} = 0$

Dieses Korollar zeigt, daß  $u_n$  stark gegen die Lösung der Variationsungleichung 1.5.8 konvergieren kann, ohne daß A gleichmäßig monoton sein muß; die entscheidende Voraussetzung ist dabei (b). Deshalb sollen noch einige Situationen untersucht werden, in denen diese Voraussetzung erfüllt ist:

## 2.2.11 LEMMA

Vor.: A koerzitiv in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , strikt monoton;  $|x'_n(0)| < c$

Beh.: Die Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert schwach gegen die Lösung u der Variationsungleichung 1.5.8 .

Beweis: Die Menge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $u_n$  Lösung von 2.2.7 ist beschränkt:

$$\begin{aligned} \langle x'_{K,n}(u_n), u_n \rangle &= \int_{\Omega} x'_n(u_n - \psi) u_n \, dx - \int_{\Omega} x'_n(\phi - u_n) u_n \, dx \\ &\geq -2|x'_n(0)| \|u_n\|_1 \\ &\geq -c \|u_n\|_{1,p,0} \quad (c \text{ von } n \text{ unabhängig}) . \end{aligned}$$

Daher ist:

$$\frac{\langle f, u_n \rangle}{\|u_n\|_{1,p}} = \frac{\langle Au_n, u_n \rangle}{\|u_n\|_{1,p}} + \frac{\langle x'_{K,n}(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|_{1,p}} \geq \frac{\langle Au_n, u_n \rangle}{\|u_n\|_{1,p}} - c$$

Wegen der Koerzitivität von A kann daher  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nicht unbeschränkt sein; da  $W_0^{1,p}(\Omega)$  reflexiv ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge von  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  .

Sei nun  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (o.B.d.A. soll die Indizierung der Gesamtfolge beibehalten werden) eine gegen  $\bar{u}$  schwach konvergente Teilfolge; zu zeigen ist noch:  $\bar{u} = u$  .

Sei  $v \in K$  beliebig; dann ist

$$\langle f - Av, v - u_n \rangle \leq \langle f - Au_n, v - u_n \rangle \quad (\text{da } A \text{ monoton})$$

Die linke Seite dieser Ungleichung konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\langle f - Av, v - \bar{u} \rangle$ , da  $u_n$  schwach gegen  $\bar{u}$  konvergiert nach Annahme.

Es soll nun noch gezeigt werden:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle f - Au_n, v - u_n \rangle \leq 0.$$

$$\begin{aligned} \langle f - Au_n, v - u_n \rangle &= \langle \chi'_{K,n}(u_n), v - u_n \rangle \\ &= \int_{\Omega} \chi'_n(u_n - \psi)(v - u_n) \, dx - \int_{\Omega} \chi'_n(\phi - u_n)(v - u_n) \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \chi'_n(u_n - \psi)(v - u_n) \, dx - \int_{\Omega} \chi'_n(\phi - u_n)(v - u_n) \, dx \end{aligned}$$

(wobei  $\Omega_0 := \{x \mid v + \pi_n > u_n > v\}$ ,  $\Omega_1 := \{x \mid v > u_n > v - \pi_n\}$ )

$$\leq 2\pi_n \mu(\Omega) |\chi'_n(0)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Also ist: } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle f - Au_n, v - u_n \rangle \leq 0.$$

Da  $v \in K$  beliebig gewählt war, gilt insgesamt:

$$\langle f - Av, v - \bar{u} \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in K,$$

d.h.  $u$  ist eine Lösung der Variationsungleichung 1.5.8 (vgl. 1.5.6).

Da  $A$  strikt monoton ist, ist die Lösung der Variationsungleichung 1.5.8 eindeutig bestimmt:  $\bar{u} = u$ .

Damit ist gezeigt:

- (a) Es gibt schwach konvergente Teilfolgen von  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
 $u_n$  Lösung von 2.1.5.
- (b) Jede schwach konvergente Teilfolge von  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert schwach gegen die Lösung  $u$  der Variationsungleichung 1.5.8.

Hieraus folgt: Die Gesamtfolge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert schwach gegen die Lösung der Variationsungleichung 1.5.8. ■

Nachdem nun die Konvergenz der Folge der Penalty-Näherungen in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  gezeigt werden konnte, sollen jetzt noch  $L^\infty$ -Abschätzungen hergeleitet werden:

## 2.2.12 SATZ

Beh.:  $|u_n - u| \leq \pi_n$  fast überall in  $\Omega$ .

Beweis: Der Beweis wird nur für  $|\psi|, |\phi| < \infty$  geführt; die Modifikationen im Fall  $\psi = -\infty$  oder  $\phi = +\infty$  sind offensichtlich.

(a)  $u_n - u \leq \pi_n$ :

$$\begin{aligned} \langle Au_n - A(u + \pi_n), (u_n - u - \pi_n)^+ \rangle &\leq \langle Au_n - Au, (u_n - u - \pi_n)^+ \rangle \\ &= \langle Au_n - f, (u_n - u - \pi_n)^+ \rangle + \langle f - Au, (u_n - u - \pi_n)^+ \rangle \\ &\leq \langle Au_n - f, (u_n - u - \pi_n)^+ \rangle \quad (*) \end{aligned}$$

da  $z := u + (u_n - u - \pi_n)^+ \in K = K_\psi \cap K^\phi$ :

offenbar:  $z \geq \psi$ ; zu zeigen noch:  $z \leq \phi$ .

(i) auf der Teilmenge von  $\Omega$ , wo  $(u_n - u - \pi_n)^+ = 0$ , gilt:  $z = u \leq \phi$ .

(ii) auf der Teilmenge von  $\Omega$ , wo  $(u_n - u - \pi_n)^+ = u_n - u - \pi_n$ , ist

$$z = u_n - \pi_n \leq \phi - \pi_n < \phi.$$

Also ist  $\langle f - Au, (u_n - u - \pi_n)^+ \rangle = \langle f - Au, z - u \rangle \leq 0$ , da  $u$  Lösung der Variationsungleichung 1.5.8 ist. Aus diesem Grund gilt die Ungleichung (\*).

Aus (\*) folgt:

$$\begin{aligned} \langle Au_n - A(u + \pi_n), (u_n - u - \pi_n)^+ \rangle &\leq - \langle \chi'_{K,n}(u_n), (u_n - u - \pi_n)^+ \rangle \\ &= - \int_{\Omega} \chi'_n(u_n - \psi)(u_n - u - \pi_n)^+ dx + \int_{\Omega} \chi'_n(\phi - u_n)(u_n - u - \pi_n)^+ dx \\ &\leq - \int_{\Omega} \chi'_n(u_n - \psi)(u_n - u - \pi_n)^+ dx \quad (\text{da } \chi'_n(x) \leq 0 \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}) \\ &\leq - \int_{\Omega_0} \chi'_n(u_n - \psi)(u_n - u - \pi_n) dx \quad (\Omega_0 := \{x \mid u_n - u > \pi_n\}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da in  $\Omega_0$ :  $u_n > \pi_n + u \geq \psi + \pi_n$  und da  $\chi'_n(x) = 0$  für  $x \geq \pi_n$ .

Aus der strikten T-Monotonie von A folgt:  $u_n - u \leq \pi_n$ .

(b)  $u - u_n \leq \pi_n$  : folgt analog durch Betrachtung von

$$\langle Au - A(u_n + \pi_n), (u - u_n - \pi_n)^+ \rangle > 0.$$

■

Zusammenfassend gilt die

### 2.2.13 FOLGERUNG

Vor.:  $|x'_n(0)| \leq c$ ; A gleichmäßig T-monoton in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Beh.: Für die Lösungen der Gleichung 2.1.5 gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

$$\|u_n - u\|_p \leq c \pi_n$$

$$\|u_n - u\|_{1,p,0} \leq c \pi_n^{1/p}$$

### 2.2.14 BEMERKUNG

In Kapitel III werden konkrete Penalty-Funktionen  $x'_n$  konstruiert, die den hier gemachten Voraussetzungen genügen.

## KAPITEL III

### LÖSUNG DER PENALTY-GLEICHUNGEN MIT DER FINITE ELEMENTE METHODE - OPTIMALE WAHL DES PENALTY-PARAMETERS

Im folgenden wird die Penalty-Gleichung

$$2.1.5 \quad \langle Au_n + \chi'_{K,n}(u_n), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

mit dem Galerkin-Verfahren (vgl. 1.4) näherungsweise gelöst. Die dabei verwendeten Ansatzfunktionen sollen bestimmte Approximationseigenschaften besitzen:

#### 3.0.1 DEFINITION

Eine Schar endlich-dimensionaler Unterräume  $S_h \subseteq W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $h \in (0,1)$ , heißt  $(k,1)$ -reguläres System in  $W^{r,s}_h(\Omega)$  ( $k > 1$ ,  $r > 1$ ,  $2 \leq s \leq p$ ), wenn gilt:

Zu jedem  $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap W^{r,s}(\Omega)$  existiert ein  $v_h \in S_h$  mit

$$\|v_h - v\|_s \leq ch^\tau \|v\|_{\tau,s}$$

$$\|v_h - v\|_{1,s} \leq ch^{\tau-1} \|v\|_{\tau,s}$$

mit  $\tau := \min(k, r)$  und  $c > 0$  unabhängig von  $v$  und  $h$ .

#### 3.0.2 BEMERKUNG

Die Konstruktion von  $(k,1)$ -regulären Systemen (allgemein auch von  $(k,m)$ -regulären Systemen in Sobolev-Räumen  $W^{m,p}(\Omega)$ ) hängt wesentlich von der Geometrie des zugrundeliegenden Gebietes  $\Omega$  ab. Das Gebiet wird in einfache Teilgebiete - meist Simplices - zerlegt; durch geeignete Interpolationsforderungen auf den Teilgebieten erreicht man die geforderten Approximationseigenschaften. Der auftretende Parameter  $h$  ist eine charakteristische Größe für die Feinheit der durchgeführten Zerlegung. Konkrete Beispiele von  $(k,1)$ -regulären Systemen findet man z.B. in CIARLET-RAVIART [1], CIARLET [1].

#### 3.0.3 BEZEICHNUNG

Anstelle der bislang verwendeten Schreibweise

$$u_n, \chi'_{K,n}, \pi_n, \chi'_n, n \rightarrow \infty \text{ etc.}$$

wird im folgenden die Schreibweise

$$u_h, x'_{K,h}, \pi_h, x'_h, \quad h \rightarrow 0 \quad \text{etc.}$$

verwandt.

Diese Schreibweise soll andeuten, daß der Parameter im Penalty-Verfahren und der für den finite Elemente Raum  $S_h$  charakteristische Parameter  $h$  gekoppelt werden sollen:  $\pi_h$  soll als Funktion von  $h$  in dem Sinn optimal bestimmt werden, daß die Konvergenzordnung der finite Elemente Approximation in der  $W^{1,p}_0(\Omega)$ -Norm möglichst groß wird.

Die so berechnete Konvergenzordnung stimmt mit derjenigen der bislang bekannten Fälle überein; die diesbezüglichen Ergebnisse von FALK [1], [2] und MOSCO-STRANG [1] seien kurz skizziert:

In den zitierten Arbeiten ist  $A$  linear,  $p=2$ ,  $n=2$ ; die Herkunft der Variationsungleichung ist eine restringierte Minimaufgabe. Die finite Elemente Approximation (bei Verwendung stückweise linearer Ansatzfunktionen) wird als Lösung einer diskreten (quadratischen) Optimierungsaufgabe definiert.

In FALK [1] werden konvexe Gebiete  $\Omega$  (mit hinreichend glattem Rand) behandelt, MOSCO-STRANG [1] behandeln Polygon-berandete Gebiete. In FALK [2] werden auch allgemeinere Gebiete (beschränkt, mit hinreichend glattem Rand, Voraussetzungen über die Krümmung des Randes) in  $\mathbb{R}^2$  zugelassen; die verwendete finite Elemente Approximation entspricht einer Methode von NITSCHKE für lineare elliptische Randwertaufgaben zweiter Ordnung (homogenes Dirichlet-Problem), die finite Elemente Räume benutzt, die keine Null-Randbedingungen erfüllen. Ergebnis aller Arbeiten ist die Abschätzung

$$3.0.3 \quad \|u_h - u\|_{1,2,0} = O(h)$$

( $u_h$  Lösung der diskreten Optimierungsaufgabe) für den Raum der stückweise linearen Funktionen. Dieser einfachste finite Elemente Raum eignet sich deswegen besonders gut für das vorliegende Hindernisproblem, weil sich Ungleichungen zwischen Funktionen, etwa  $u_h \geq v_h$ , auf endlich viele Ungleichungen zwischen reellen Zahlen reduzieren.

### 3.1 EIN STÖRUNGSSATZ

Im folgenden wird untersucht, wie die Lösung der Penalty-Gleichung 2.1.5 auf Störungen in den Hindernissen  $\psi$  und  $\phi$  reagiert; dazu werden Lösungen von 2.1.5 mit jeweils verschiedenen Hindernissen miteinander verglichen. Die Hindernisse  $\psi$  und  $\phi$  seien im folgenden dieselben wie bisher; insbesondere gilt für sie die Voraussetzung 2.2.5(b). Die Schreibweise " $u_h(\phi, \psi)$  ist Lösung von 2.1.5 ( $\phi, \psi$ )" soll bedeuten: " $u_h(\phi, \psi)$  ist Lösung der Gleichung 2.1.5 mit oberem Hindernis  $\phi$  und unterem Hindernis  $\psi$ ". Zu beachten ist, daß für die Hindernisse  $\phi$  und  $\psi$  im folgenden weder die Voraussetzung 2.2.5(b) noch die Voraussetzung " $\phi \geq 0, \psi \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ " gefordert wird; insbesondere gilt dann i.a. nicht mehr:  $\psi \leq u_h(\phi, \psi) \leq \phi$ . Man überzeugt sich leicht davon, daß Bemerkung 2.2.6 (c) auch für solche Hindernisse gültig bleibt.

#### 3.1.1 LEMMA

Vor.: (a) A strikt T-monoton in  $W^{1,p}(\Omega)$ ;

(b)  $\phi \leq \phi$ ;  $\psi \geq \psi$ ;  $\psi, \phi, \psi, \phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

Beh.:  $- \|\phi - \phi\|_{\infty} \leq u_h(\phi, \psi) - u_h(\phi, \psi) \leq \|\psi - \psi\|_{\infty}$

Beweis:

Es sei  $u := u_h(\phi, \psi)$ ,  $v := u_h(\phi, \psi)$ ; der Index "h" wird stets unterdrückt.

(a)  $u - v \leq \|\psi - \psi\|_{\infty}$

Sei  $k > 0$ , dann gilt:

$$\langle Av - A(u+k), (v-u+k)^+ \rangle \leq \langle Av - Au, (v-u-k)^+ \rangle$$

$$= \int_{\Omega} [\chi'(u-\psi) - \chi'(v-\psi)](v-u-k)^+ dx \quad (*)$$

$$- \int_{\Omega} [\chi'(\phi-u) - \chi'(\phi-v)](v-u-k)^+ dx \quad (**)$$

$$(*) = \int_{\Omega} [\chi'(u-\psi) - \chi'(v-k-\psi)](v-u-k)^+ dx$$

$$+ \int_{\Omega} [\chi'(v-k-\psi) - \chi'(v-\psi)](v-u-k)^+ dx$$

$$\leq \int_{\Omega} [\chi'(v-k-\psi) - \chi'(v-\psi)](v-u-k)^+ dx$$

$$\leq 0, \quad \text{falls } k = \|\psi - \psi\|_{\infty}, \quad \text{da in diesem Fall der Integrand negativ}$$

wegen der Monotonie von  $\chi'$ .

$$\begin{aligned}
 (**) &= \int_{\Omega} [\chi'(\phi-v) - \chi'(\phi-u)] (v-u-k)^+ dx \\
 &= \int_{\Omega} [\chi'(\phi-v) - \chi'(\phi-u-k)] (v-u-k)^+ dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} [\chi'(\phi-u-k) - \chi'(\phi-u)] (v-u-k)^+ dx \\
 &\leq \int_{\Omega} [\chi'(\phi-u-k) - \chi'(\phi-u)] (v-u-k)^+ dx \quad (\text{da } \chi' \text{ monoton}) \\
 &\leq 0, \text{ da } \phi-u \geq \phi-u-k \text{ und } \chi' \text{ monoton wachsend.}
 \end{aligned}$$

Aus der strikten T-Monotonie von A folgt:  $v-u \leq \|\psi-\psi\|_{\infty}$

(b) Analog folgt:  $-\|\phi-\phi\|_{\infty} \leq v-u$  durch Betrachtung von  $\langle Au - A(v+k), (u-v-k)^+ \rangle$ ,  $k \geq \|\phi-\phi\|_{\infty}$

### 3.1.2 SATZ

Vor.: (a) A strikt T-monoton in  $W^{1,p}(\Omega)$ ;

(b)  $\phi, \psi, \psi, \psi \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ :  $\phi \geq 0$ ,  $\psi \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ .

Beh.:

$$-\|(\phi-\phi)^-\|_{\infty} - \|(\psi-\psi)^-\|_{\infty} \leq u_h(\phi, \psi) - u_h(\phi, \psi) \leq \|(\phi-\phi)^+\|_{\infty} + \|(\psi-\psi)^+\|_{\infty}$$

Beweis:

Sei  $\Lambda := \psi + (\psi-\psi)^+$ ; es ist  $\Lambda \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $\Lambda \geq \psi$ ,  $\Lambda \leq \psi$ .

Analog:  $\Gamma := \phi - (\phi-\phi)^+$ ,  $\Gamma \leq \phi$ ,  $\Gamma \leq \phi$ .

Nach 3.1.1 gilt:

$$-\|\phi-\Gamma\|_{\infty} \leq u_h(\Gamma, \Lambda) - u_h(\phi, \psi) \leq \|\Lambda-\Gamma\|_{\infty}$$

$$\text{d.h.: } -\|(\phi-\phi)^-\|_{\infty} \leq u_h(\Gamma, \Lambda) - u_h(\phi, \psi) \leq \|(\psi-\psi)^+\|_{\infty}.$$

$$\text{Analog: } -\|(\phi-\phi)^+\|_{\infty} \leq u_h(\Gamma, \Lambda) - u_h(\phi, \psi) \leq \|(\psi-\psi)^-\|_{\infty}$$

Hieraus folgt wegen

$$u_h(\phi, \psi) - u_h(\phi, \psi) = u_h(\phi, \psi) - u_h(\Gamma, \Lambda) + u_h(\Gamma, \Lambda) - u_h(\phi, \psi)$$

die Behauptung.

Das folgende Korollar zeigt, wie stark die Lösungen des gestörten Problems 2.1.5  $(\phi, \psi)$  die Nebenbedingungen des ursprünglichen Problems 2.1.5  $(\phi, \psi)$  höchstens verletzen:

### 3.1.3 KOROLLAR

Beh.:  $\psi - \|(\phi - \phi)^-\|_\infty - \|(\psi - \psi)^-\|_\infty \leq u_h(\phi, \psi) \leq \phi + \|(\phi - \phi)^+\|_\infty + \|(\psi - \psi)^+\|_\infty$   
f.ü. in  $\Omega$ .

Beweis: Nach 2.2.7 gilt:  $u_h(\phi, \psi) - \psi \geq u_h(\phi, \psi) - u_h(\phi, \psi)$ ; hieraus folgt mit 3.1.2 die erste Ungleichung. Die zweite Ungleichung folgt analog. ■

### 3.1.4 KOROLLAR

Vor.: A gleichmäßig T-monoton in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Beh.:

$$\|u_h(\phi, \psi) - u_h(\phi, \psi)\|_{1,p,0}^p \leq c |\chi'_h(-\|\phi - \phi\|_\infty - \|\psi - \psi\|_\infty)| (\|\phi - \phi\|_\infty + \|\psi - \psi\|_\infty)$$

Beweis: Abkürzungen wie im Beweis von 3.1.1.

$$\alpha \|v - u\|_{1,p,0}^p \leq \langle Au - Av, u - v \rangle$$

$$= \int_{\Omega} [\chi'(v - \psi) - \chi'(u - \psi)](u - v) \, dx \quad (*)$$

$$- \int_{\Omega} [\chi'(\phi - v) - \chi'(\phi - u)](u - v) \, dx \quad (**)$$

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\Omega} [\chi'(v - \psi) - \chi'(u - \psi)](u - v) \, dx + \int_{\Omega} [\chi'(u - \psi) - \chi'(u - \psi)](u - v) \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} [\chi'(u - \psi) - \chi'(u - \psi)](u - v) \, dx \quad (\text{da } \chi' \text{ monoton wachsend}) \\ &= \int_{\Omega} [\chi'(u - \psi + (\psi - \psi)) - \chi'(u - \psi)](u - v) \, dx \\ &\leq c |\chi'(-\|\psi - \psi\|_\infty)| (\|\phi - \phi\|_\infty + \|\psi - \psi\|_\infty) \quad (\text{nach 2.2.7, 3.1.2}) \end{aligned}$$

Analog:  $(**) \leq c |\chi'(-\|\phi - \phi\|_\infty)| (\|\phi - \phi\|_\infty + \|\psi - \psi\|_\infty)$ ; aus der Monotonie von  $\chi'$  folgt schließlich die Behauptung. ■

### 3.1.5 KOROLLAR

Vor.: (a) A sei gleichmäßig T-monoton in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

$$(b) \quad \phi_h, \psi_h \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$(c) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \pi_h^{-1} (\|\phi_h - \phi\|_\infty + \|\psi_h - \psi\|_\infty) < \infty$$

(d) u sei Lösung der Variationsungleichung 1.5.8.

Beh.: Es gibt Konstanten  $c_i > 0$  ( $i=1,2,3$ ), so daß

$$\|u_h(\phi_h, \psi_h) - u\|_p \leq c_1 \pi_h$$

$$\|u_h(\phi_h, \psi_h) - u\|_{1,p,0} \leq c_2 |x_h'(-c_3 \pi_h)|^{1/p} \pi_h^{1/p}$$

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus 2.2.9, 2.2.12, 3.1.2, 3.1.4.

### 3.1.6 BEMERKUNG

Die in diesem Abschnitt angewandten Methoden beruhen auf einer Idee von HAUGAZEAU [1] (vgl. auch BREZIS [2]). In BREZIS [2] werden auf ähnliche Weise die Lösungen von zwei Variationsungleichungen mit verschiedenen Hindernissen verglichen.

### 3.2 FINITE ELEMENTE APPROXIMATION DER PENALTY-GLEICHUNG 2.1.5

Sei  $S_h \subseteq W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  ein  $(k,1)$ -reguläres System mit  $k \geq 2$ ; es sei  $\dot{S}_h := S_h \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ . Es soll nun das Konvergenzverhalten der Galerkin-Approximation  $U_h \in S_h$ ,  $U_h$  Lösung von

$$3.2.1 \quad \langle f - AU_h, V_h \rangle = \int_{\Omega} [\chi_h'(U_h - \psi_h) - \chi_h'(\phi_h - U_h)] V_h \, dx$$

für alle  $V_h \in \dot{S}_h$ ,  $\psi_h, \phi_h \in S_h$ .

für  $h \rightarrow 0$  untersucht werden (Großbuchstaben kennzeichnen stets Elemente des finite Elemente Raums).

Dieses Konvergenzverhalten läßt dann Schlußfolgerungen darüber zu, wie man bei der praktischen Durchführung des Verfahrens die Penalty-Funktion  $\chi_h'$  und den Penalty-Parameter  $\pi_h$  zu wählen hat.

Den Begriff der strikten T-Monotonie, der sich als ein sehr starkes Hilfsmittel bei den Konvergenzbeweisen für die Lösungen von 2.1.5 erwiesen hat, kann man nun nicht mehr ausnutzen, da i.a. aus  $U_h, V_h \in \dot{S}_h$  nicht  $(U_h - V_h)^+ \in \dot{S}_h$  folgt:  $(U_h - V_h)^+$  ist i.a. keine zulässige Testfunktion in 3.2.1.

Um quantitative Aussagen über das Konvergenzverhalten der Lösungen von 3.2.1 machen zu können, benötigt man noch Voraussetzungen über das Wachstumsverhalten von  $A$  und  $\chi_h'$ ; diese Voraussetzungen seien im folgenden für geeignete Parameter  $\tau$  und  $\gamma$  stets erfüllt:

#### 3.2.2 VORAUSSETZUNG

(a)  $\chi_h'$  sei beschränkt  $(\tau, \gamma)$ -Hölder-stetig:

für  $|x|, |y| \leq R$  gelte:

$$|\chi_h'(x) - \chi_h'(y)| \leq c L_h(R) \pi_h^{-\tau} |x - y|^{\gamma}$$

mit  $L_h(R) := (1 + \pi_h^{-1} R)^{\gamma}$ ,  $\tau, \gamma \in [0, 1]$ .

(b) Für  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  sei  $A$  beschränkt Lipschitz-stetig:

$$\|Au - Av\|_{1,p'} \leq L_A(R) \|u - v\|_{1,p,0}$$

mit  $\max(\|u\|_{1,p,0}, \|v\|_{1,p,0}) \leq R$ ,  $L_A(R) \leq cR^{p-2}$ .

### 3.2.3 BEMERKUNG

(a) 3.2.2 (a) ist z.B. erfüllt für die Funktionen

$$(i) \quad x_h'(x) := -c[(1-\pi_h^{-1}x)^+]^t,$$

falls  $0 < t < 2$ ,  $\max(\|(A\psi-f)^+\|_\infty, \|(A\phi-f)^-\|_\infty) \leq c$  (vgl. 2.2.5 (b)).

Für  $|x|, |y| \leq R$  ist

$$|x_h'(x) - x_h'(y)| \leq cL_h(R) \pi_h^{-\tau} |x-y|^\tau$$

mit  $\tau = \min(1, t)$ ,  $L_h(R) = (1+\pi_h^{-1}R)^{t-\tau}$ .

(ii)

$$x_h'(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \geq \pi_h \\ -c(1-\pi_h^{-1}x) & , \text{ falls } 0 \leq x \leq \pi_h \\ -c & , \text{ falls } x \leq 0 \end{cases}$$

(c wie in (i)).

(b) Insbesondere folgt aus 3.2.2 (a) (man setze dort  $y := \pi_h$ ): für festes  $c > 0$  ist  $\{|x_h'(-c/\pi_h)|\}$  bzgl.  $h$  gleichmäßig beschränkt (vgl. 3.1.5).

(c) Voraussetzung 3.2.2 (b) ist z.B. für den Pseudo-Laplace-Operator - aber auch in allgemeineren Situationen - erfüllt (vgl. GAJEWSKI-GRÜGER-ZACHARIAS [1], S.69).

(d) Ist  $A$  gleichmäßig monoton auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , so gilt

$$\alpha \|u\|_{1,p,0}^p \leq \langle Au - A_0, u \rangle \leq L_A(\|u\|_{1,p,0}) \|u\|_{1,p,0}^2;$$

Also gilt:  $L_A(R) \geq \alpha R^{p-2}$  für alle  $R > 0$ .  $L_A$  wächst für  $R \rightarrow \infty$  mindestens wie ein Polynom vom Grad  $p-2$ . Voraussetzung 3.2.2 (b) besagt nun, daß  $L_A$  auch nur höchstens wie ein Polynom vom Grad  $p-2$  anwächst. Es sei noch bemerkt, daß die folgenden Sätze auch noch gelten, falls  $L_A(R) = o(R^\kappa)$  für  $R \rightarrow \infty$ ,  $\kappa \in [p-2, p-1]$ .

### 3.2.4 LEMMA

Vor.: (a) Die Lösung  $u$  der Variationsungleichung 1.5.8 sei aus

$$W^{r,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \quad (r > 1);$$

(b)  $A$  sei gleichmäßig  $T$ -monoton in  $W^{1,p}(\Omega)$ ;

(c)  $\phi_h, \psi_h \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

(d)  $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \pi_h^{-1} (\|\phi_h - \phi\|_\infty + \|\psi_h - \psi\|_\infty) < \infty$

Beh.: Es gibt ein  $v_h \in \hat{S}_h$ , so daß

$$\|v_h - u_h(\phi_h, \psi_h)\|_p \leq c (h^r + \pi_h)$$

$$\|v_h - u_h(\phi_h, \psi_h)\|_{1,p,0} \leq c (h^{r-1} + \pi_h^{1/p})$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c > 0$ .

Beweis:

$$\begin{aligned} \|v_h - u_h(\phi_h, \psi_h)\|_{1,p,0} &\leq \|v_h - u\|_{1,p,0} + \|u - u_h(\phi_h, \psi_h)\|_{1,p,0} \\ &\leq ch^{r-1} + c \pi_h^{1/p} \end{aligned}$$

(nach 3.0.1, 3.1.5 und 3.2.3 (b)) .

$$\begin{aligned} \|v_h - u_h(\phi_h, \psi_h)\|_p &\leq \|v_h - u\|_p + \|u - u_h(\phi_h, \psi_h)\|_p \\ &\leq ch^r + c \pi_h \end{aligned}$$

(nach 3.0.1, 3.1.5). ■

### 3.2.5 LEMMA

Vor.: (a) Voraussetzungen wie in 3.2.4;

(b) es sei  $\gamma + \tau \leq s-1$ ,  $s > p$  sei so, daß  $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^s(\Omega)$   
(vgl. 1.1.1, 2.2.2 ff);

(c) Bezeichnung:

$$\varepsilon_1(h) := h^{r-1} + \pi_h^{1/p}, \quad \varepsilon_2(h) := h^{r(1+\tau)} \pi_h^{-(\gamma+\tau)} + \pi_h^{1-\gamma}$$

(d) es gelte:  $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) < \infty$

Beh.: Für die Lösung  $U_h$  von 3.2.1 gilt die folgende Fehlerabschätzung:

$$\|U_h - u_h(\phi_h, \psi_h)\|_{1,p,0} \leq c \left( \varepsilon_1^{p-1}(h) + \varepsilon_2^p(h) \right)$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c > 0$ .

Beweis:

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei im folgenden

$$U := U_h$$

$$v := u_h(\phi_h, \psi_h)$$

$$\chi' := \chi'_h$$

gesetzt.

Aus 3.2.1 folgt

$$3.2.1 \quad \langle f - AU, V_h - U \rangle = \int_{\Omega} [\chi'(U - \psi_h) - \chi'(\phi_h - U)](V_h - U) \, dx$$

für alle  $V_h \in \hat{S}_h$  ;

aus 2.1.5 folgt:

$$\langle f - Av, V_h - U \rangle = \int_{\Omega} [\chi'(v - \psi_h) - \chi'(\phi_h - v)](V_h - U) \, dx$$

für alle  $V_h \in \hat{S}_h$ , da  $\hat{S}_h \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$  .

Durch Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle AU - Av, V_h - U \rangle &+ \int_{\Omega} [\chi'(U - \psi_h) - \chi'(v - \psi_h)](V_h - U) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} [\chi'(\phi_h - v) - \chi'(\phi_h - U)](V_h - U) \, dx = 0 . \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \|U - v\|_{1,p,0}^p &\leq \langle AU - Av, U - v \rangle \\ &= \langle AU - Av, V_h - v \rangle \\ &\quad + \int_{\Omega} [\chi'(U - \psi_h) - \chi'(v - \psi_h)](V_h - U) \, dx \quad (*) \\ &\quad + \int_{\Omega} [\chi'(\phi_h - v) - \chi'(\phi_h - U)](V_h - U) \, dx \quad (**) \end{aligned}$$

für alle  $V_h \in \hat{S}_h$ . Um (\*) nach oben abzuschätzen, muß nur über jenen Teil von  $\Omega$  integriert werden, wo der Integrand positiv ist. Das ist der Fall, wenn die beiden Faktoren gleiches Vorzeichen haben.

Daher ist

$$(*) \leq \int_{\Omega'} [\chi'(U - \psi_h) - \chi'(v - \psi_h)] (V_h - U) \, dx$$

( $\Omega'$  ist hier jenes bis auf Nullmengen eindeutig bestimmte Teilgebiet von  $\Omega$ , wo

$$V_h < U < v \quad \text{oder} \quad V_h > U > v).$$

Man kann (\*) weiter abschätzen, indem man die beiden Faktoren des Integranden jeweils absolut vergrößert:

$$\begin{aligned} (*) &\leq \int_{\Omega'} [\chi'(V_h - \psi_h) - \chi'(v - \psi_h)] (V_h - v) \, dx \\ &\leq c \pi_h^{-\tau} \int_{\Omega} L_h (|V_h - \psi_h| + |v - \psi_h|) |V_h - v|^{1+\tau} \, dx \quad (\text{nach 3.2.2}) \\ &\leq c \pi_h^{-\tau-\gamma} \int_{\Omega} [|V_h - \psi_h| + |v - \psi_h|]^{\tau} |V_h - v|^{1+\tau} \, dx \end{aligned}$$

(da o.B.d.A.  $|V_h - \psi_h| + |v - \psi_h| \geq \pi_h$  angenommen werden kann)

Nach der Hölder'schen Ungleichung folgt nun:

$$(*) \leq c \pi_h^{-\tau-\gamma} \left[ \int_{\Omega} (|V_h - \psi_h| + |v - \psi_h|)^{\frac{s}{s-1-\tau}\gamma} \, dx \right]^{\frac{s-1-\tau}{s}} \|V_h - v\|_s^{1+\tau};$$

dabei sei  $V_h$  gemäß Lemma 3.2.4 gewählt.

Für  $h \rightarrow 0$  konvergiert  $V_h$  in  $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^s(\Omega)$  (nach 3.2.4, 3.1.5),

$v = u_h(\phi_h, \psi_h)$  konvergiert in  $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^s(\Omega)$  (nach 3.1.5),

$\psi_h$  konvergiert in  $L^\infty(\Omega)$  (nach Vor. (c) in 3.1.5); hieraus folgt:

$|V_h - \psi_h| + |v - \psi_h|$  ist in  $L^s(\Omega)$  gleichmäßig beschränkt.

Wegen  $\tau + \gamma \leq s-1$  ist daher auch

$$\int_{\Omega} (|V_h - \psi_h| + |v - \psi_h|)^{\frac{s}{s-1-\tau}\gamma} \, dx$$

bzgl.  $h$  gleichmäßig beschränkt.

Damit ist gezeigt:

$$(*) \leq c \pi_h^{-\tau-\gamma} \|V_h - v\|_p^{1+\tau}.$$

Dieselbe Abschätzung läßt sich analog für (\*\*) zeigen.

Man kann daher die Ausgangsungleichung wie folgt abschätzen:

$$\|U - v\|_{1,p,0}^p \leq \langle AU - Av, v_h - v \rangle + c \pi_h^{-\tau-\gamma} \|v_h - v\|_p^{1+\tau}.$$

Da  $v = u_h(\phi_h, \psi_h)$  bzgl.  $h$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  gleichmäßig beschränkt ist, kann o.B.d.A. angenommen werden, daß für hinreichend kleine  $h$

$$\|U_h\|_{1,p,0} = \|U\|_{1,p,0} \geq \|v\|_{1,p,0}.$$

Aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von  $A$  (vgl. 3.2.2 (b)) folgt nun

$$\begin{aligned} \|U - v\|_{1,p,0}^p &\leq c \|U\|_{1,p,0}^{p-2} \|U - v\|_{1,p,0} \|v_h - v\|_{1,p,0} \\ &\quad + c \pi_h^{-\tau-\gamma} \|v_h - v\|_p^{1+\tau} \\ &\leq c \|U\|_{1,p,0}^{p-2} \|U - v\|_{1,p,0} \varepsilon_1(h) + c \varepsilon_2(h) \end{aligned}$$

(nach 3.2.4).

Dies ist eine Ungleichung vom Typ

$$x^p \leq ax + b \quad (a, b > 0);$$

die positiven Lösungen dieser Ungleichung lassen sich abschätzen durch

$$x \leq p^{-1} \sqrt{2a} + p \sqrt{2b}.$$

Daher gilt:

$$\|U - v\|_{1,p,0} \leq c \|U\|_{1,p,0}^{\frac{p-1}{p}} p^{-1/\varepsilon_1(h)} + c p^{1/\varepsilon_2(h)}.$$

Hieraus folgt schließlich, daß  $U = U_h$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  bzgl.  $h$  gleichmäßig beschränkt ist:

Annahme:  $\|U\|_{1,p,0} \rightarrow \infty$  für  $h \rightarrow 0$ .

Dann gilt (die Indizes bei der  $W_0^{1,p}$ -Norm werden unterdrückt):

$$\frac{\|U - v\|}{\|U - v\| + \|v\|} \leq \frac{\|U - v\|}{\|U\|} \leq c p^{-1/\varepsilon_1(h)} / \|U\| + c p^{1/\varepsilon_2(h)} / \|U\|.$$

Für  $h \rightarrow 0$  konvergiert die linke Seite der Ungleichung gegen 1, da  $v = u_h(\phi_h, \psi_h)$  gleichmäßig beschränkt ist. Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert für  $h \rightarrow 0$  gegen 0; damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt. ■

Lemma 3.2.5 liefert die gewünschte Fehlerabschätzung für  $\|U_h - u\|_{1,p,0}$  :

### 3.2.6 SATZ

Vor.: (a) Es sei  $\pi_h := ch^\mu$ ,  $r(1+\tau) \geq (\tau+\gamma)\mu > 0$ ,  $\mu > 0$  ;

(b) es sei  $\|\phi_h - \phi\|_\infty + \|\psi_h - \psi\|_\infty \leq ch^\mu$  für hinreichend kleine  $h > 0$ ;

(c) A sei gleichmäßig T-monoton in  $W^{1,p}(\Omega)$ ;

(d) die Lösung u der Variationsungleichung 1.5.8 sei aus  $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{r,p}(\Omega)$  ( $r > 1$ );

(e) es gelte 3.2.5 (b) .

Beh.: Für die Lösung  $U_h$  der Galerkin-Gleichung 3.2.1 gilt die folgende Fehlerabschätzung:

$$\|U_h - u\|_{1,p,0} \leq c \left( h^{\frac{r-1}{p-1}} + h^{\frac{\mu}{p(p-1)}} + h^{\frac{r}{p}(1+\tau) - \frac{\tau+\gamma}{p}} + h^{\frac{1-\gamma}{p}\mu} \right)$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten  $c > 0$ .

Beweis: Es ist

$$\|U_h - u\|_{1,p,0} \leq \|U_h - u_h(\phi_h, \psi_h)\|_{1,p,0} + \|u_h(\phi_h, \psi_h) - u\|_{1,p,0} .$$

Hieraus folgt mit 3.2.5, 3.1.5 und 3.2.3 (b) die Behauptung. ■

Die Bedeutung von Satz 3.2.6 liegt vor allem darin, daß man einen Anhaltspunkt hat, wie man die Penalty-Funktion  $\chi_h'$  wählen muß, um eine möglichst große Konvergenzordnung zu erzielen.

Man entnimmt der Fehlerabschätzung in 3.2.6, daß es günstig ist, die Penalty-Funktion  $\chi_h'$  so zu wählen, daß  $\gamma = 0$  ist (das ist z.B. für die Penalty-Funktionen aus 3.2.3 (a) für  $0 < t \leq 1$  der Fall).

Ist darüberhinaus  $\mu = r$ , so erhält man ein besonders einfaches Resultat:

### 3.2.7 KOROLLAR

Vor.: (a) Die Lösung  $u$  der Variationsungleichung 1.5.8 sei aus  $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{r,p}(\Omega)$  ( $r > 1$ );

(b)  $A$  sei gleichmäßig  $T$ -monoton in  $W^{1,p}(\Omega)$ ;

(c) es sei  $\pi_h := ch^r$ ;

(d) es gelte  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} (\|\phi_h - \phi\|_\infty + \|\psi_h - \psi\|_\infty) < \infty$ ,

(e)  $x_h^i$  erfülle 3.2.2 (a) mit  $\gamma = 0$ .

Beh.: Für die Lösung der Galerkin-Gleichung 3.2.1 gilt die folgende Fehlerabschätzung:

$$\|u_h - u\|_{1,p,0} \leq ch^\lambda, \quad \text{mit } \lambda = \begin{cases} \frac{r-1}{p-1} & , \text{ falls } r \leq p' \\ \frac{r}{p(p-1)} & , \text{ falls } r \geq p' \end{cases}$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c > 0$ .

### 3.2.8 BEMERKUNGEN

(a) Der Fall  $r=p=2$  und linearer elliptischer Variationsungleichungen wurde von FALK [1],[2] und MOSCO-STRANG [1] untersucht. Ausgangspunkt dieser Untersuchungen ist nicht die Variationsungleichung 1.5.2, sondern das am Beginn von 1.5 erwähnte Minimalproblem: die Lösung der Variationsungleichung wird approximiert durch eine Folge von Lösungen diskreter Minimalprobleme. Bei Verwendung von stückweise linearen finiten Elementen wird die (quasi-optimale) Konvergenzordnung  $O(h)$  nachgewiesen.

3.2.7 zeigt, daß bei geeigneter Wahl der Penalty-Funktion und des Penalty-Parameters die hier vorgestellte Penalty-Methode dieselbe Konvergenzordnung liefert.

(b) Für gleichmäßig elliptische Randwertaufgaben in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  (speziell für den Pseudo-Laplace-Operator) wurde von GLOWINSKI-MARROCO [1] bei Verwendung von stückweise linearen finiten Elementen die Konvergenzordnung

$$O(h^{\frac{r-1}{p-1}}) \quad \text{in der } W_0^{1,p}(\Omega)\text{-Norm}$$

gezeigt, falls die Lösung aus

$$W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{r,p}(\Omega) \quad (r > 1)$$

ist. Wenn man nun in der in 3.2.7 angegebenen Abschätzung die Herkunft des Terms

$$\frac{r}{O(h^{p(p-1)})}$$

zurückverfolgt, so gelangt man über 3.2.4 schließlich zu Satz 2.2.8; es zeigt sich, daß im Fall von Variationsgleichungen dieser Term entfällt. Man erhält daher für gleichmäßig elliptische Randwertaufgaben in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  dieselbe Konvergenzordnung wie obige Autoren.

In der Arbeit von GLOWINSKI-MARROCO wird Gebrauch gemacht von der Theorie der nichtlinearen Interpolation zwischen Banachräumen (nach TARTAR); in der hier dargestellten Vorgehensweise wird - versteckt - die Theorie der linearen Interpolation zwischen Banachräumen (nach PEETRE et al.) verwendet: die Voraussetzung 3.o.1 über die Approximationseigenschaften des finite Elementes Raumes beinhaltet ein solches Interpolationsargument.

Ob das "Abknicken" der Konvergenzordnung in 3.2.7 bei  $r=p$  eine Besonderheit von finite Elemente Approximationen von Variationsungleichungen (mit Hindernisnebenbedingungen) darstellt oder methodisch bedingt ist, ist nicht bekannt, da für die in Frage kommenden Probleme bisher keine vergleichbaren Resultate anderer Autoren vorliegen.

(c) Satz 3.2.6 liefert für eine ganze Klasse von Penalty-Funktionen einen Konvergenzbeweis für das Penalty-Verfahren; Korollar 3.2.7 ist nur eine mögliche Folgerung aus 3.2.6, die jedoch eine Reihe von wichtigen Spezialfällen beinhaltet (vgl. (a), (b)).

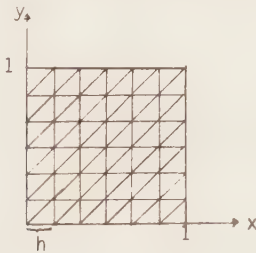
## KAPITEL IV

### NUMERISCHE REALISIERUNG DES PENALTY-VERFAHRENS; NUMERISCHE ERGEBNISSE

Die Darstellung und die Durchführung des Penalty-Verfahrens beschränkt sich auf einseitige Hindernis-Probleme; die Verallgemeinerung auf zweiseitige Hindernis-Probleme ist offensichtlich.

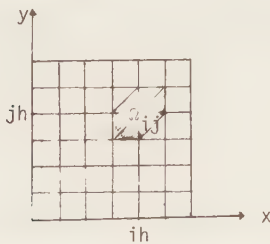
#### 4.1 NUMERISCHE REALISIERUNG DES VERFAHRENS FÜR $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

Das Gebiet  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$  sei wie folgt trianguliert:



Es sei  $P_{ij} := (ih, jh)$ ,  $h = 1/m$ ,  $0 \leq i, j \leq m$ ,  $m \geq 2$ . Als finite Elemente Raum  $S_h$  wird der Raum der stetigen, auf jedem Dreieck der Triangulation linearen Funktionen gewählt.

Ist  $\Omega_{ij}$  die konvexe Hülle der Punkte  $P_{i,j-1}$ ,  $P_{i+1,j}$ ,  $P_{i+1,j+1}$ ,  $P_{i,j+1}$ ,  $P_{i-1,j}$  und  $P_{i-1,j-1}$ ,



so ist eine Basis von  $S_h$  gegeben durch jene Funktionen  $\omega_{ij}$  aus  $S_h$ , die auf  $\Omega - \Omega_{ij}$  verschwinden und in  $P_{ij}$  den Wert 1 annehmen.

Für einseitige Hindernisnebenbedingungen (d.h.  $\phi = \infty$ ) ist nun das folgende nichtlineare Gleichungssystem äquivalent zu den Galerkin-Gleichungen 3.2.1

$$\begin{aligned}
 4.1.1 \quad & \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_{ij}} a_k(x, \nabla u_h) \frac{\partial}{\partial x_k} \omega_{ij} \, dx + \int_{\Omega_{ij}} [b(x, u_h) - f] \omega_{ij} \, dx = \\
 & = \int_{\Omega_{ij}} -x_h'(u_h - \psi_h) \omega_{ij} \, dx \quad (1 \leq i, j \leq m-1)
 \end{aligned}$$

mit

$$u_h := \sum_{i,j=1}^{m-1} \alpha_{ij} \omega_{ij} .$$

Dabei sei  $\psi_h(P_{ij}) := \psi(P_{ij})$  und  $\psi_h$  linear auf jedem Teildreieck der Triangulation von  $\Omega$ , d.h.  $\psi_h$  sei eine stückweise lineare Interpolierende des Hindernisses  $\psi$ .

Das nichtlineare Gleichungssystem 4.1.1 kann i.a. nur mit Hilfe eines Iterationsverfahrens gelöst werden; in den hier durchgeführten Rechnungen wurde das SOR-NEWTON-Verfahren (vgl. ORTEGA-RHEINBOLDT [1]) benutzt.

Die Berechnung der linken Seite von 4.1.1 erfolgt (in jedem Iterationsschritt) wie bei der numerischen Lösung von nichtlinearen elliptischen Randwertaufgaben mit stückweise linearen finiten Elementen durch numerische Quadraturen; hierauf soll nicht näher eingegangen werden.

Die numerische Auswertung der rechten Seite von 4.1.1, dem Penalty-Term, soll etwas ausführlicher dargestellt werden; es genügt offenbar, die Integration für ein Teildreieck der Triangulation zu erläutern. Dieses Teildreieck werde im folgenden mit  $\Delta_{ij}$  ( $\subseteq \Omega_{ij}$ ) bezeichnet.

Es ist für  $V_h \in \hat{S}_h$ :

$$M_{\Delta} := \text{supp} \{x_h'(V_h - \psi_h) \omega_{ij}\} \cap \Delta_{ij} = \{(x, y) \in \Delta_{ij} \mid V_h(x, y) \leq \psi_h(x, y) + \pi_h\} ,$$

$$\int_{\Delta_{ij}} x_h'(V_h - \psi_h) \omega_{ij} \, dx = \int_{M_{\Delta}} x_h'(V_h - \psi_h) \omega_{ij} \, dx .$$

Im folgenden sei o.B.d.A. :  $M_{\Delta} \neq \emptyset$  .

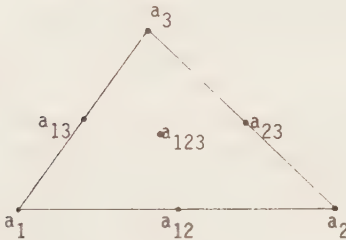
Ist  $M_{\Delta} = \Delta_{ij}$ , so kann man

$$4.1.2 \quad \int_{M_{\Delta}} x_h^i (V_h - \psi_h) \omega_{ij} \, dx$$

mit einer geeigneten Quadraturformel berechnen; hier wurde das Quadratschema

$$4.1.3 \quad \int_{\Delta} f \, dx \approx \frac{\nu(\Delta)}{60} \left\{ 3 \sum_{i=1}^3 f(a_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} f(a_{ij}) + 27 f(a_{123}) \right\}$$

(für  $f \in C^0(\Delta)$ )



( $a_{123}$  Schwerpunkt von  $\Delta$ )

für ein Dreieck  $\Delta$  benutzt.

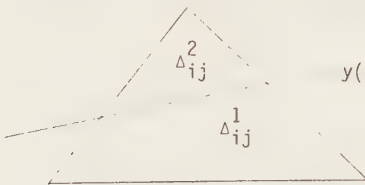
Eine ausführliche Darstellung der numerischen Quadratur in höheren Dimensionen findet man z.B. in CIARLET [1].

Aufwendiger ist die Berechnung von 4.1.2, wenn  $\emptyset \subsetneq M_{\Delta} \subsetneq \Delta_{ij}$ .

In diesem Fall teilt die durch

$$V_h(x, y) = \psi_h(x, y) + \pi_h$$

beschriebene Gerade das Dreieck  $\Delta_{ij}$  in 2 Teile  $\Delta_{ij}^1$  und  $\Delta_{ij}^2$ .



$y(x)$ , wo  $V_h(x, y(x)) = \psi_h(x, y(x)) + \pi_h$

Dann ist  $M_{\Delta} = \Delta_{ij}^1$  oder  $M_{\Delta} = \Delta_{ij} \setminus \Delta_{ij}^1 = \Delta_{ij}^2$ , so daß sich auch in diesem Fall die Berechnung von 4.1.2 auf die Quadratur über Dreiecken zurückführen läßt.

Die Beschreibung der Vorgehensweise macht folgendes deutlich:

- (a) Ist die Penalty-Funktion  $\chi_h'$  durch mehr als eine Fallunterscheidung definiert, so wächst der Aufwand zur Berechnung des Penalty-Terms 4.1.2 an.
- (b) Verwendet man finite Elemente höherer Ordnung, so wird man die Integrale 4.1.2 mit einer hinreichend genauen Quadraturformel berechnen, ohne den Träger des Integranden genau zu bestimmen.

Diese Bemerkungen zeigen, daß die numerische Realisierung des Penalty-Verfahrens auch in anderen als den hier beschriebenen Situationen grundsätzlich möglich ist, jedoch u.U. größere praktische Schwierigkeiten mit sich bringt.

In den gerechneten Beispielen wurde die Penalty-Funktion  $\chi_h'$  aus 3.2.3(a)(i) mit  $t=1$ ,  $\pi_h=h^2$  gewählt; die Berechnung von 4.1.2 ist in diesem Fall mit dem Integrationsschema 4.1.3 exakt möglich. Bei der Durchführung des SOR-NEWTON-Verfahrens zur Bestimmung der  $(m-1)^2$  Unbekannten  $\alpha_{ij}$  traten keine Schwierigkeiten auf, obwohl die hier verwendete Penalty-Funktion nicht überall differenzierbar ist (die Ableitung von  $\chi_h'$  in  $x = \pi_h$  wurde 0 gesetzt). Differenzierbare Penalty-Funktionen sind etwa die Funktionen  $\chi_h'$  aus 3.2.3(a)(i) mit  $t > 1$ .

Als Startwert der Iteration wurde  $\max(\psi_h, U_h^{G1})$  gewählt; dabei ist  $U_h^{G1}$  die finite Elemente-Lösung des entsprechenden nichtrestringierten Problems.

Die Größe  $(A\psi-f)^+$ , die bei der Konstruktion der Penalty-Funktion eine Rolle spielt (vgl. 2.2.5, 3.2.3), wurde von Hand ausgerechnet; als Näherung für  $\|(A\psi-f)^+\|_\infty$  wurde  $\max_{i,j} (A\psi-f)^+(P_{ij})$  berechnet.

## 4.2 NUMERISCHE ERGEBNISSE

### 4.2.1 Das Minimalflächenproblem mit Hindernissen und vorgeschriebener mittlerer Krümmung

Es sei  $K_\psi := \{ v \in W^{1,\infty}(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ f.ü. in } \Omega \} \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ ,

$\psi \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ ,  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ ;

gesucht ist ein  $u \in K_\psi$ ,

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} u}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} u\right)^2}} \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \, dx - \int_{\Omega} f(v-u) \, dx \leq 0$$

für alle  $v \in K_\psi$ .

Als Hindernis wurde

$$\psi(x,y) := a \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) - b, \quad a > b > 0,$$

als Inhomogenität

$$f \equiv 1$$

(d.h. die vorgegebene mittlere Krümmung ist konstant) gewählt.

Da die exakte Lösung des Problems nicht bekannt ist, wurde  $U_{1/96}$  als exakte Lösung angesehen; für  $a=1$ ,  $b=0.1$ ,

$$h = 1/12, 1/24, 1/48$$

wurde dann  $\|U_h - U_{1/96}\|_{1,2,0}$  berechnet:

| $h$  | $\ U_h - U_{1/96}\ _{1,2,0}$ |
|------|------------------------------|
| 1/12 | 0.105                        |
| 1/24 | 0.049                        |
| 1/48 | 0.021                        |

Falls die Lösung  $u$  dieses Minimalflächenproblems aus  $W^{2,p}(\Omega)$  ist (die bekannten Regularitätsresultate lassen sich nicht anwenden, da dort nur glatte Ränder  $\partial\Omega$  betrachtet werden), so ist nach 3.2.6 lineare Konvergenz in der Energienorm zu erwarten; die praktische Rechnung bestätigt diese Konvergenzordnung im vorliegenden Beispiel.

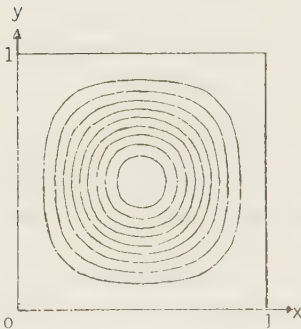
Die Ergebnisse, die das verwendete 1-SOR-NEWTON-Verfahren lieferte, änderten sich bei der angegebenen Wahl des Startwerts nach durchschnittlich 30 Iterationsschritten um weniger als 1% (komponentenweise); der Relaxationsparameter  $\omega$  wurde je nach Größe von  $m$  aus dem Intervall  $[1.6, 1.8]$  gewählt.

Die durchgeführten Rechnungen gaben zu der Vermutung Anlaß, daß es sich bei der Kontaktmenge um eine Niveaufläche von  $\psi$  handelt:

$$K := \{ (x,y) \in \Omega \mid u(x,y) = \psi(x,y) \} = \{ (x,y) \in \Omega \mid \psi(x,y) \geq \gamma \}$$

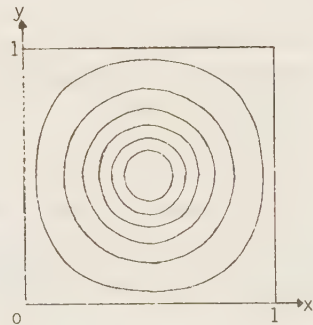
mit einer zunächst unbekannten Konstanten  $\gamma$ .

In den beiden folgenden Diagrammen wurden daher die Höhenlinien von  $\psi$  und von  $U_{1/24}$  eingezeichnet:



Höhenliniendiagramm für  $\psi$   
(eingetragen sind die Linien -  
von innen nach außen - :

$$\psi(x,y)=0.8, 0.7, \dots, 0.1, 0 \quad )$$



Höhenliniendiagramm für  $U_{1/24}$   
(eingetragen sind die Linien -  
von innen nach außen - :

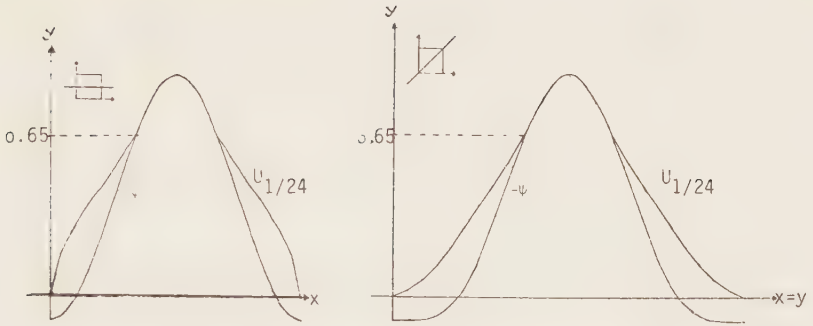
$$U_{1/24} = 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.2 \quad )$$

Ein Vergleich der beiden Höhenliniendiagramme zeigt, daß die beiden inneren Höhenlinien sehr genau übereinstimmen, während die Linien  $\psi(x,y)=0.6$  und  $U_{1/24}=0.6$  schon deutlich voneinander abweichen.

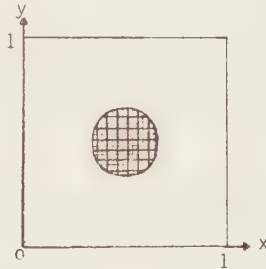
In den beiden folgenden Diagrammen wurden noch zwei seitliche Schnitte eingezeichnet (das Symbol in der linken oberen Ecke charakterisiert jeweils die Schnittrichtung); die Ergebnisse deuten darauf hin, daß die Kontaktmenge  $K$  die Gestalt

$$K = \{ (x,y) \in \Omega \mid \psi(x,y) \geq \gamma \} \quad \text{mit} \quad \gamma \approx 0.65$$

hat.



Die so bestimmte Näherung für die Kontaktmenge  $K$  hat die folgende Gestalt (schraffierte Fläche):



Aufgrund der Konstruktion des Penalty-Verfahrens kann nicht erwartet werden, daß die finite Elemente Lösung  $U_h$  die Nebenbedingung  $U_h \geq \psi$  oder  $U_h \geq \psi_h$  erfüllt; es wurde jedoch bei den durchgeführten Rechnungen ein Verhalten  $U_h - \psi_h \geq -ch^2$  beobachtet.

Die Menge  $\{ (x,y) \in \Omega \mid U_h(x,y) = \psi_h(x,y) \}$  ist daher i.a. eine schlechte Approximation der eigentlichen Kontaktmenge  $K$ .

#### 4.2.2 HALBLINEARE VARIATIONSUNGLEICHUNGEN MIT HINDERNISNEBENBEDINGUNGEN

Es sei  $K_\psi := \{ v \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ f.ü.} \}$ ,  $\psi \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ ,  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ ; gesucht ist ein  $u \in K_\psi$  mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u) \, dx + \int_{\Omega} b(u)(v-u) \, dx - \int_{\Omega} f(v-u) \, dx \leq 0$$

für alle  $v \in K_\psi$ .

Verschiedene Autoren (z.B. MITCHELL [1], WHITEMAN [1]) bemerken, daß Variationsungleichungen diesen Typs bei Strahlungsproblemen der Reaktorphysik ( $b(u) = e^u$ ) und bei Problemen der molekularen Diffusion ( $b(u) = u^3$ ) auftreten. Es sollen hier nur die Ergebnisse im Fall

$$b(u) = u^3$$

dargestellt werden; als Hindernis wurde wie in 4.2.1

$$\psi(x,y) := \alpha \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 - \beta, \quad \alpha > \beta > 0$$

gewählt, als Inhomogenität

$$f \equiv 0.$$

Auch für dieses Problem ist die exakte Lösung nicht bekannt; es wurde daher wieder  $U_{1/96}$  als exakte Lösung betrachtet. Für  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.1$  wurde

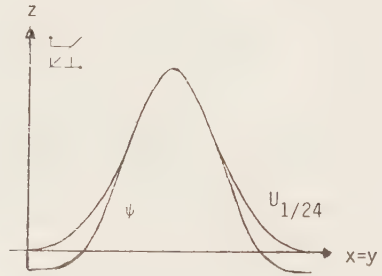
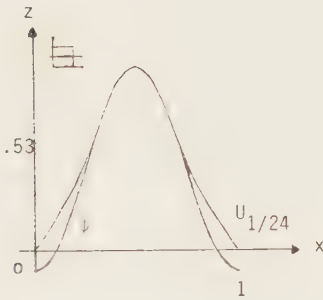
$$\|U_h - U_{1/96}\|_{1,2,0}$$

berechnet; die Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

| $h$  | $\ U_h - U_{1/96}\ _{1,2,0}$ |
|------|------------------------------|
| 1/12 | 0.068                        |
| 1/24 | 0.035                        |
| 1/48 | 0.019                        |

Die zu erwartende lineare Konvergenz in der Energienorm wird auch hier durch die praktischen Rechnungen bestätigt.

Die beiden folgenden Diagramme geben einen Eindruck vom Verlauf der Lösung:



Die Bestimmung der Kontaktmenge ist nur ungenau möglich, da sich einerseits die Lösung sehr flach an das Hindernis anschmiegt und andererseits die finite Elemente Lösung die Nebenbedingung nur näherungsweise erfüllt.

#### 4.2.3 BEMERKUNGEN

Die Beispiele in 4.2.1, 4.2.2 und eine ganze Reihe weiterer gerechneter Probleme haben gezeigt, daß die Bestimmung der Kontaktmenge durch Vergleich von Hindernis und finite Elemente Lösung der Variationsungleichung sehr oft eine schlecht konditionierte Aufgabenstellung ist; auf diese Tatsache wird in der Literatur nicht hingewiesen.

In vielen Anwendungen, vor allem in der Elastizitätstheorie (vgl. 1.5.8), ist gerade die Kontaktmenge die "eigentliche" Unbekannte des Problems.

## LITERATURVERZEICHNIS

ADAMS, R.A.

- [1] Sobolev-Spaces  
Academic Press, New York (1975)

AMANN, H.

- [1] Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems  
in ordered Banach spaces  
SIAM Reviews Vol. 18 No 4 (1976), 620-709

AUBIN, J.P.

- [1] Approximation des espaces de distributions et des  
opérateurs différentiels  
Bull. Soc. Math. France Mem. 12 (1967), 1 - 138
- [2] Approximation of variational inequalities  
in: Functional Analysis and Optimization  
E.R. CAIANELLO (ed.)  
Academic Press, New York (1966), 7 - 14

AUSLENDER, A.

- [1] Problèmes de Minimax via l'Analyse convexe et les in-  
égalités variationnels  
Springer, Lectures Notes in Economics (1972)

BABUŠKA, I., AZIZ, A.K.

- [1] Survey lectures on the mathematical foundations of the  
finite element method  
in: A.K. AZIZ (ed.)  
The mathematical foundations of the finite element method  
with applications to partial differential equations  
Academic Press, New York (1972)

BARBU, V.

- [1] Nonlinear semigroups and differential equations in Banach-  
spaces  
North Holland, Leyden (1976)

BOHL, E.

- [1] Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen  
Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1974)

BREZIS, H.

- [1] Equations et inequations nonlineaires dans les  
espaces vectoriels en dualite  
Ann.Inst.Fourier 18,1 (1968), 115 - 175

- [2] Problemes unilateraux  
J.Math. pures et appl. 51 (1972), 1 - 168

BREZIS, H. , KINDERLEHRER, D.

- [1] The smoothness of solutions to nonlinear variational  
inequalities  
Indiana Univ. Math. Journ. 23 (1974), 831 - 844

BREZIS, H. , SIBONY, M.

- [1] Equivalence de deux inequations variationnelles et  
applications  
Arch.Rat.Mech.Anal. 41 (1971), 254 - 265

BREZIS, H. , STAMPACCHIA, G.

- [1] Sur la regularite de la solution d'inequations el-  
liptique  
Bull.Soc.Math.France 96 (1968), 153 - 180

BROWDER, F.E.

- [1] Existence and uniqueness theorems for solutions of  
nonlinear boundary value problems  
Proc.of Symp. in Appl. Math. 17 (1965), 24 - 49
- [2] Problemes non-lineaires  
Seminaire de Mathematique superieures, Montreal (1965)

CARROLL, R.W.

- [1] Abstract methods in partial differential equations  
Harper & Row, New York (1969)

CHOQUET-BRUHAT, Y.

- [1] Distributions - Theorie et Problemes  
Masson, Paris (1973)

CIARLET, P.G.

- [1] Numerical analysis of the finite element method  
Seminaire de Mathematique superieures, Montreal (1975)

CIARLET, P.G. , RAVIART, P.A.

- [1] General Lagrange and Hermite interpolation in  $R^n$  with  
applications to finite element methods  
Arch.Rat.Mech.Anal. 46 (1972), 177 - 199

CIARLET, P.G., SCHULTZ, H.H., VARGA, R.S.

- [1] Numerical methods of high order accuracy for nonlinear boundary problems V. Monotone operator theory  
Num.Math. 13 (1969), 51 - 77

DIAS, J.P., SIBONY, M.

- [1] Methodes d'approximation pour certaines problemes non lineaires non homogene  
Journ. of Diff.Eq. 9 (1971), 182 - 204

DUVAUT, G., LIONS, J.L.

- [1] Les inequations en mecanique et en physique  
Dunod, Paris (1972)

EKELAND, I., TEMAM, R.

- [1] Analyse convexe et problemes variationels  
Dunod, Paris (1974)

EL KOLLI, A.

- [1] Regularite de la solution et majoration de l'erreur d'approximation pour un problem de Dirichlet non lineaire  
Journ. of Diff.Eq. 22 (1976), 453 - 466

FALK, R.S.

- [1] Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities  
Math. Comp. 28 (1974), 963 - 971
- [2] Approximation of an elliptic boundary value problem with unilateral constraints  
R.A.I.R.O. 9 (1975), 5 - 12

FRIEDMAN, A.

- [1] Partial Differential Equations  
Holt, Rinehart & Winston, New York (1969)

GAJEWSKI, H., GRÜGER, K., ZACHARIAS, K.

- [1] Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen  
Akademie Verlag, Berlin (1974)

GLOWINSKI, R., LIONS, J.L., TREMOLIERES, R.

- [1] Analyse numerique des inequations variationnelles  
1 - Theorie general, premieres applications  
Dunod, Paris (1976)
- [2] Analyse numerique des inequations variationnelles  
2 - Applications aux phenomenes stationnaires et d'evolution  
Dunod, Paris (1976)

GLOWINSKI, R., MARROCO, A.

- [1] Sur l'approximation, par elements finis d'ordre un, et la resolution, par penalisation-dualite, d'une classe de problemes de Dirichlet non lineaire  
R.A.I.R.O. 9 (1975), 41 - 76

HARTMAN, Ph., STAMPACCHIA, G.

- [1] On some nonlinear elliptic differential functional equations  
Acta Math. 115 (1966), 271- 310

HAUGAZEAU, Y.

- [1] Sur des inequations variationnelles  
C.R.Acad.Sci. 265 (1967), 95 - 98

LADYZHENSKAYA, O.A., URAL'TSEVA, N.N.

- [1] Linear and quasilinear elliptic equations  
Academic Press, New York (1968) ~

LAGNESE, J.

- [1] Perturbations in variational inequalities  
Journ.Math.Anal.Appl. 55 (1976), 302 - 328

LANGENBACH, A.

- [1] Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Anwendung  
Springer, Berlin Heidelberg New York (1977)

LEWY, H. , STAMPACCHIA, G.

- [1] On the regularity of the solution of a variational inequality  
Comm.Pure Appl.Math. 22 (1969), 153 - 188

LIONS, J.L.

- [1] Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires  
Dunod, Paris (1969)

LIONS, J.L., MAGENES, E.

- [1] Non-homogeneous boundary value problems and applications I  
Springer, Berlin Heidelberg New York (1972)

LIONS, J.L., STAMPACCHIA, G.

- [1] Variational inequalities  
Comm.Pure Appl.Math. 20 (1967), 493 - 519

LOUIS, A.

- [1] Fehlerabschätzungen für Lösungen quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen mittels finiter Elemente  
Dissertation, Mainz (1976)

MITCHELL, A.R., WAIT, R.

- [1] The finite element method in partial differential equations  
Wiley, London New York (1977)

MITTELMANN, H.D.

- [1] On the approximate solution of nonlinear variational inequalities  
Preprint THD Darmstadt Nr. 361, 1977

MARTIN, R.H.M. Jr.

- [1] Nonlinear operators and differential equations in Banach-spaces  
Wiley, London New York (1976)

MOSCO, U.

- [1] Implicit variational problems and quasivariational inequalities  
in: Gossez, J.P. (ed.)  
Nonlinear operators and the calculus of variations  
Springer, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 543
- [2] Perturbation of variational inequalities  
Proc. of Symp. in Pure Math. 18,1 (1970), 182 - 194

MOSCO, U., STRANG, G.

- [1] One sided approximation and variational inequalities  
Bull. of the Amer.Math.Soc. 80 (1974), 308 - 312

NATTERER, F.

- [1] Optimale  $L^2$ -Konvergenz finiter Elemente bei Variationsungleichungen  
Bonner Math.Schr. 89 (1976), 1 - 12

NECAS, J.

- [1] Les methodes directes en theorie des equations elliptique  
Masson, Paris (1967)

NITSCHKE, J.

- [1]  $L$ -Convergence of finite element approximations  
Tagung: Mathematical aspects of the finite element method, Rom (1975)

ORTEGA, J.M., RHEINOLDT, W.C.

- [1] Iterative solution of nonlinear equations in several variables  
Academic Press, New York (1970)

SCHAEFER, H.H.

- [1] Topological vector spaces  
Springer, New York Heidelberg Berlin (1971)
- [2] Banach lattices and positive operators  
Springer, Berlin Heidelberg New York (1974)

SCHWARTZ, L.

- [1] Theorie des distributions  
Hermann, Paris (1967)

SIBONY, M.

- [1] Sur l'approximation d'equations et inequations aux derivees partielles non lineaires de type monotone  
Journ.Math.Anal.Appl. 34 (1971), 502 - 564

STAMPACCHIA, G.

- [1] On a problem of numerical analysis connected with the theory of variational inequalities  
Symp.Math. 10 (1972), 281 - 293
- [2] Variational inequalities  
in: Ghizzetti, A. (ed.)  
Theory and applications of monotone operators  
Proc. of a NATO advanced study institute (1969)
- [3] Le probleme de Dirichlet pour les equations du second ordre a coefficients discontinus  
Ann.Inst.Fourier 15,1 (1965), 189 - 258
- [4] Regularity of solutions of some variational inequality  
Proc. of Symp. in Pure Math. 18,1 (1970), 271 - 281

STRANG, G., FIX, G.

- [1] An analysis of the finite element method  
Prentice Hall, Englewood Cliffs (1973)

VAINBERG, M.M.

- [1] Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations  
Wiley, New York (1973)

WHITEMAN, J.R.

- [1] Finite element methods for mildly nonlinear elliptic equations and inequations  
in: Albrecht, J., Collatz, L. (ed.)  
Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Bd.2)  
Birkhäuser, Basel (1976)



## LEBENS LAUF

Name: Werner  
Vorname: Wilhelm Hermann  
geboren am 26. Oktober 1948 in 654 Simmern/Hunsrück  
Familienstand: ledig  
Eltern: Willy Werner  
Henrica Werner, geb. Hoolmans  
wohnhaft in: 654 Simmern, Bingener Str. 24

### Schulischer Werdegang:

1954-1959 Kath. Volksschule Simmern  
1959-1967 Staatl. Herzog Johann Gymnasium Simmern  
Abschluß: Reifeprüfung  
1967-1969 Grundwehrdienst bei der Bundeswehr

### Studium:

SS 1969 Immatrikulation an der Johannes Gutenberg Universität,  
Mainz, im Hauptfach: Mathematik, Nebenfach: Physik  
SS 1971 Diplomvorprüfung  
ab WS 72/73 zweites Nebenfach: Betriebswirtschaftslehre  
SS 1974 Diplomhauptprüfung in Mathematik, Nebenfach: Physik

### seit 1. August 1974 :

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik  
der Johannes Gutenberg Universität, Mainz .

65 Mainz, den 1. Oktober 1977

*Wilhelm Werner*





